Vorlesungsskript

Einführung in die Plasmaphysik

Sommersemester 2023

Ruhr-Universität Bochum

Prof. A. von Keudell

27. Juli 2026

Vorwort

Diese Notizen sind aus der Vorlesung 'Einführung in Plasmaphysik' in den Sommersemestern 2004, 2006, 2014 und 2017 entstanden. Als wesentliche Quellen wurden die Bücher von Chen (*Plasma Physics and Controlled Fusion*), Liebermann und Lichtenberg (*Principles of Plasma Discharges and Materials Processing*) sowie von Kaufmann (*Plasmaphysik und Fusionsforschung*)verwendet. Diese Notizen sollen und können natürlich diese Bücher nicht ersetzen und verstehen sich als Ergänzung.
Konzeptionell beginnt die Vorlesung nach einer *Einführung* mit den *Beschreibungsformen* von Plasma dem Einzelteilchen- und Vielteilchenbild. Nach einer Betrachtung von *Stoßprozessen* schließt sich eine Diskussion des *Transports* in magnetisierten Plasmen an. Die Diagnostik und das Heizen von Plasmen wird im Kapitel *Wellen* beschrieben. Wie sich diese Heizung auf die Verteilungsfunktion der Teilchen im Plasma überträgt wird im Kapitel *Kinetik* behandelt. Die Randbedingungen von Plasmen vor Wänden wird im Kapitel *Plasmarand* betrachtet. Abschließend wird die Anwendung von Plasmen in der *Plasmatechnik* und der *Fusionsforschung* diskutiert.
Ausgeklammert ist eine ausgedehntere Beschreibung der MHD Gleichgewichte und Instabilitäten in torodialen Plasmen. Dies ist Gegenstand einer Vertiefungs-Vorlesung "Fusions-Plasmaphysik". Auch bei der Beschreibung kinetischer Phänomene sind häufig benutzte Verfahren der Niedertemperatur-Plasmaphysik betont worden.
Mein Dank gilt den Bochumer Kollegen für die zahlreichen Anregungen zum Manuskript.
In SS 2023 wurden Animationen zu einzelnen Phänomenen der Plasmaphysik hinzugefügt. Diese sind jeweils auf Youtube (https://www.youtube.com/@AchimvonKeudell) verlinkt bzw. der Python Code befindet sich auf github (https://github.com/AchimVonKeudell/PhysicsVisualisations).

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **6**

1.1 Plasmen in Natur und Technik 7

1.1.1 Natürliche Plasmen 7

1.1.2 Plasmen in der Technik 7

1.2 Definition Plasma 9

1.2.1 Konzept der Temperatur 9

1.2.2 Debye-Abschirmung 10

1.2.3 Plasmafrequenz 13

1.3 Einteilung von Plasmen 14

2 Beschreibung von Plasmen **17**

2.1 Einzelteilchenbild 18

2.1.1 Teilchendriften 18

2.1.2 Adiabatische Invarianten 39

2.2 Vielteilchenbild 46

2.2.1 Hierarchie der Gleichungen der Plasmaphysik 46

2.2.2 Verteilungsfunktion 48

2.2.3 zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion 49

2.2.4 Momente der Boltzmann-Gleichung, Fluidbild 52

2.2.5 Driften im Fluidbild 58

2.2.6 Vergleich Fluidbild - Einzelteilchenbild 63

3 Stöße **66**

3.1 Definitionen 66

3.2 differentieller Wirkungsquerschnitt 68

3.3 Das Streuproblem 70

3.4 Streupotentiale 72

3.4.1 Coulomb-Streuung, Coulomb-Logarithmus 72

3.4.2 Polarisations-Streuung 75

3.4.3 Ionisation 78

3.5 Ionisationsgleichgewichte 80

4 Transport **85**
4.1 Diffusion und Drift im Fluidbild 85
4.2 Transport in teil-ionisierten Plasmen 89
4.2.1 ambipolare Diffusion 89
4.2.2 Diffusion senkrecht zum B-Feld 92
4.3 Transport in voll-ionisierten Plasmen 94
4.3.1 Stöße zwischen Ladungsträgern 94
4.3.2 Spezifischer Widerstand bzw. Leitfähigkeit eines Plasmas 95
4.3.3 Diffusion senkrecht zum B-Feld, Magnetohydrodynamik 97
4.4 Zeitabhängige Effekte der MHD 105
4.4.1 Diffusion des Magnetfeldes 106
4.4.2 Eingefrorener Fluss 108
4.5 Gleichgewichte und Instabilitäten 109
4.5.1 Stabilität einer zylindrischen Plasmasäule 109
4.5.2 Instabilitäten 111

5 Wellen in Plasmen **122**
5.1 Elektrostatische Wellen 123
5.1.1 Elektronen-Oszillationen 123
5.1.2 Elektronen-Wellen 125
5.1.3 Ionen-Wellen 127
5.1.4 Elektronenwellen senkrecht zum B-Feld, obere hybride Frequenz 129
5.1.5 Ionenwellen senkrecht zum B-Feld, untere hybride Frequenz 130
5.2 Elektromagnetische Wellen 133
5.2.1 em-Wellen für $B_0 = 0$ 134
5.2.2 em-Wellen mit $B_0 \neq 0$ 136
5.3 Hydromagnetische Wellen 143
5.3.1 Alfven-Wellen 144
5.3.2 Magnetosonische Wellen 145

6 Kinetik **147**
6.1 Verteilungsfunktion im GGW, Maxwell-Verteilung 148
6.2 Verteilungsfunktion im Einfluß äußerer Felder 150
6.2.1 2-Term Näherung 150
6.2.2 Boltzmann-Gleichung in 2 Term Näherung 152

6.3 Kinetische Wellendämpfung, Landau Dämpfung . . . 161

7 Der Plasmarand 164
7.1 Randschicht . . . 164
7.1.1 Raumladungszone . . . 165
7.1.2 Vorschicht . . . 167
7.2 Floating potential, Plasma potential . . . 169
7.3 Randschichten mit angelegter Spannung . . . 170
7.3.1 Matrix-Schicht . . . 172
7.3.2 Child-Langmuir-Schicht . . . 173
7.3.3 Stoß-bestimmte Randschicht . . . 175
7.4 Sonden-Messungen . . . 177

8 Anwendung: Niedertemperaturplasmen 182
8.1 DC Entladung . . . 182
8.1.1 Townsend-Entladung - unselbstständige Entladung . . 182
8.1.2 Glimmentladung - selbstständige Entladung, Paschenkurve . . . 184
8.1.3 Magnetisch unterstütze DC-Entladung, Magnetronplasmen . . . 189
8.2 Kapazitiv gekoppelte RF Entladungen . . . 191
8.2.1 Spannung . . . 191
8.2.2 Heizmethoden . . . 195
8.2.3 Asymmetrische, kapazitive rf-Entladung . . . 198
8.3 Induktiv gekoppelte RF Entladungen . . . 202
8.4 Plasmen mit Wellenheizung . . . 206
8.4.1 Mikrowellenplasmen . . . 206
8.4.2 ECR Plasmen . . . 207
8.5 Atmosphärendruck-Plasmen . . . 210
8.5.1 Bogen-Entladung . . . 210
8.5.2 Dielektrisch behinderte Entladung . . . 213
8.6 Globale Plasmamodelle . . . 216
8.6.1 Teilchenbilanzen . . . 216
8.6.2 Energiebilanz . . . 218

9 Anwendung: Kernfusion 219
9.1 Fusionsreaktionen . . . 219
9.2 Zünd-Kriterium . . . 222
9.3 Plasma-Einschluss . . . 227
9.3.1 Tokamak . . . 227

9.3.2 Limiter, Divertor 233
9.3.3 Transport im Tokamak 235
9.4 Plasmaheizung 239
9.5 Materialien für die Fusion 241

A Fragenkatalog **244**
A.1 Kapitel 1: Einleitung 244
A.2 Kapitel 2: Beschreibung von Plasmen 244
A.3 Kapitel 3: Stöße 245
A.4 Kapitel 4: Transport 246
A.5 Kapitel 5: Wellen 247
A.6 Kapitel 6: Kinetik 247
A.7 Kapitel 7: Plasmarand 248
A.8 Kapitel 8: Niedertemperaturplasmen 248
A.9 Kapitel 9: Fusion 249

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Kapitel 1

Einleitung

Plasmen sind teilweise oder vollständig ionisierte Gase wie sie in Leuchterscheinungen für den Menschen sichtbar werden. Irving Langmuir hatte den Begriff "Plasma" geprägt, um das scheinbar regellose Ensemble aus positiven und negativen Ladungsträger zu beschreiben. Langmuir leitete diese Bezeichnung aus dem bekannten Mikroskopbild eines biologischen "Blutplasmas" ab. Leider wird der Begriff Plasma in der Öffentlichkeit fast immer mit diesem biologischen Plasma gleich gesetzt, obwohl viele Produkte des täglichen Lebens in ihrem Herstellungsprozeß mit Plasmen in Kontakt kommen. Trotzdem wird die Bezeichnung Plasma nicht zur Benennung eines Gegenstandes herangezogen. Bekanntestes Beispiel ist die Neonröhre oder Leuchtstoffröhre, die doch besser als Plasmalampe zu beschreiben wäre.

In diesem Kapitel werden die Besonderheiten eines Plasmas charakterisiert und die wesentlichen Kenngrößen abgeleitet. Zudem wird eine Klassifizierung der Plasmen vorgestellt.

Plasmen sind die häufigste Form der sichtbaren Materie. Bei der Energiezufuhr zu einem Festkörper durchläuft dieser mehrere **Aggregatszustände**. Mit zunehmender Temperatur beginnt er zunächst zu schmelzen und wird zu einer Flüssigkeit. Bei weiterer Erhöhung beginnt die Flüssigkeit zu verdampfen. Wird die Energiezufuhr pro Teilchen allerdings so hoch, dass Atome oder Moleküle ionisiert werden können, so entsteht ein Plasma. Deshalb spricht man hier auch vom vierten Aggregatszustand der Materie. Eine vorläufige **Definition des Plasmazustandes** sei:

> "Ein Plasma ist ein quasineutrales Gas geladener und ungeladener Teilchen das kollektives Verhalten zeigt"

In diesem Satz sind die wesentlichen Begriffe, quasineutral und kollektiv. Dies soll Plasmen z.B. von einem Ionenstrahl abgrenzen.

1.1 Plasmen in Natur und Technik

1.1.1 Natürliche Plasmen

Plasmen sind natürliche Bestandteile des Universums. In Sternen finden bei hohem Druck und Temperature Fusionsreaktionen statt. Die frei werdende Energie hält den Plasmazustand in diesen Systemen aufrecht. Der Strahlungsdruck ist hier im Gleichgewicht mit der Gravitationskraft.
Im Sonnensystem strömt von unserem Zentralgestirn kontinuierlich Plasma ab, der Sonnenwind. Diese Teilchen treffen auf die Erde und gelangen entlang der Magnetfeldlinien vornehmlich zu den Polregionen. Dort findet Ionisation in der Atmosphäre statt, die man als Polarlichter beobachten kann.
Blitze entsprechen Entladungen zwischen Potentialdifferenzen zwischen Wolken oder zwischen Wolken und Erde, die durch Reibungsphänomene in Gewitterwolken entstehen.

1.1.2 Plasmen in der Technik

Kernfusion

In der Anwendung von Plasmen spielt die kontrollierte Kernfusion eine zentrale Bedeutung. Sie war und ist wesentlich für die Fortentwicklung der Plasmaforschung. Ziel ist es die Kernfusionsreaktionen, wie sie in der Sonne stattfinden, auf der Erde nachzubilden. Nachdem der Brennstoff für die Fusionsreaktion Wasserstoffisotope sind, die unbegrenzt zur Verfügung stehen, stellt ein Fusionskraftwerk eine unerschöpfliche Energiequelle für die Zukunft dar. Um diese Ziel zu erreichen, ist die aussichtsreichste Fusionsreaktion mit dem größten Wirkungsquerschnitt die DT Reaktion gemäß:

$$\mathrm{D} + \mathrm{T} \rightarrow \mathrm{He} + \mathrm{n} + 17.6\mathrm{MeV} \tag{1.1}$$

Hierbei hat der Heliumkern eine Energie von ~ 4 MeV und das Neutron eine Energie von ~ 13 MeV. Um Kernfusion auf der Erde zu realisieren gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Konzepte des Einschlusses:

- Bei der Fusion in magnetisch eingeschlossenen Plasmen wird ein Plasma durch das Einkoppeln von Energie in Form von Wellenheizung und Neutralteilcheninjektion auf Temperaturen um 10^4 eV gebracht. Bei Teilchendichten von 10^{20} m^{-3} muß dieser Einschluss in der Größenordnung

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

von mehreren Sekunden aufrechterhalten werden, um ein Plasma zu erhalten, dass durch die Energiefreisetzung bei den Kernfusionsreaktionen selbstständig weiter brennt.

- Im Gegensatz dazu wird bei der Laserfusion der Brennstoff durch das Einstrahlen von Laserleistung komprimiert. Die äußere Hülle eines sphärischen Pellets wird abladiert und die nach innen laufende Schockfront komprimiert den Kern des Pellets. Die Temperaturen sind wieder ungefähr 10^4 eV allerdings werden Dichten von 10^{30} m^{-3} erreicht. Diese Form des Einschluss gelingt allerdings nur für Nanosekunden.

Beide Situation sind vergleichbar, da für einen erfolgreichen Fusionsreaktor das sog. Dreifach-Produkt (Dichte $\times$ Temperatur $\times$ Einschlußzeit) einen bestimmten Wert überschreiten muß.

Plasmatechnik

In der Plasmatechnik betrachtet man in der Regel kalte Plasmen bei denen die Temperatur der Ionen im Bereich Raumtemperatur bleibt. Die Unterscheidung in kalte und heiße Plasmen wird bezüglich der Temperatur der Ionen vorgenommen.
Mehrere Anwendungsfelder der Plasmatechnik können unterschieden werden:

- **Beleuchtungstechnik**

  Lichterzeugung ist ein großes Einsatzfeld der Plasmatechnik. Die Leuchtstoffröhre oder Energiesparlampe sind eigentlich Plasmalampen, die sich durch lange Lebensdauer und hohe Licht-Effizienz auszeichnen.

- **Oberflächentechniken**

  Plasmaprozesse finden vielfältige Anwendung in der Beschichtung und Modifizierung von Oberflächen. So basieren z.B. zahlreiche Herstellungsschritte in der Halbleiterindustrie auf Plasmaätzprozessen oder Plasmabeschichtungsprozessen. Bei diesen Verfahren wird ein Ausgangsgas in dem Plasma dissoziiert und die Dissoziationsprodukte reagieren mit den umgebenden Wänden und führen zu Beschichtung oder Materialabtrag.

- **Plasmaspritzen**

  Thermische Plasmen werden eingesetzt um dünne Film aus Metallen oder Keramiken herzustellen. Hierbei wird in ein Plasma, das bei Atmosphärendruck brennt, einem thermischen Bogen, ein Pulver injiziert.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Die Partikel schmelzen im Bogen auf und bilden beim Auftreffen auf das Substrat wieder einen homogenen Film.

- **Plasmaschalter**

  Für das Schalten hoher Ströme sind Plasmaschalter unerlässlich. Hierbei gilt es beim Öffnen einer elektrischen Verbindung die viele kA führt, das Entstehen eines Lichtbogens zu unterdrücken. Hierzu wird oftmals SF_6 als Gas eingesetzt, da es stark elektronegativ ist und damit entstehende Elektronen durch Anlagerungs-Reaktionen (Bildung negativer Ionen) bindet. Der Stromtransport durch die leichten Elektronen wird so unterbunden

1.2 Definition Plasma

1.2.1 Konzept der Temperatur

Bislang wurden schon verschiedene Temperaturen in Bezug auf kalte und heiße Plasmen unterschieden. Der Energieinhalt eines Plasma läßt sich mittels der sogenannten Verteilungsfunktion charakterisieren. Typisches Beispiel ist die **Maxwell-Verteilung** die einer Verteilungsfunktion maximaler Entropie entspricht. Sie bildet sich aus, falls die Teilchen genügend elastische Stöße untereinander erfahren.

$$f(v) = Ae^{\frac{-\frac{1}{2}mv^2}{k_BT}} \tag{1.2}$$

Die Verteilungsfunktion muß zunächst noch normiert werden. Hierfür kann man zwei Konventionen verwenden. Falls die Verteilungsfunktion auf eins normiert wird, also die Wahrscheinlichkeit angibt ein Teilchen in einem Geschwindigkeitsintervall dv zu finden, bekommt man:

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} e^{\frac{-\frac{1}{2}mv^2}{k_BT}} \tag{1.3}$$

Alternativ kann $f(v)$ auch direkt die Dichte n der Teilchen im Geschwindigkeitsintervall dv angeben. Man bekommt dann:

$$f(v) = n\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} e^{\frac{-\frac{1}{2}mv^2}{k_BT}} \tag{1.4}$$

Aus dieser Verteilungsfunktion läßt sich die mittlere Energie eines Teilchens ableiten.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\langle E \rangle = \frac{\int \frac{1}{2} m v^2 f(v) d^3v}{\int f(v) d^3v} = \frac{3}{2} k_B T \tag{1.5}$$

hierbei ist k_B T = 1 eV = 11594 K. Das Konzept der Temperatur ist durch elastische Stößen der Teilchen untereinander bedingt. Treten genügend Stöße auf, so können sich die Temperaturen der einzelnen Ladungsträger aneinander angleichen. Man spricht vom **thermischen Gleichgewicht** ($T_e = T_i$). Die Wärmekopplung zwischen Elektronen und Ionen ist wegen dem großen Massenunterschied allerdings gering und es sind für einen Temperaturausgleich ein Vielzahl von Stößen nötig. Das Konzept einer Temperatur kann allerdings noch verwendet werden indem man Ionen und Elektronen separat Temperaturen zuweist.
Bezüglich der Parameter Ladungsträgerdichte n und Temperatur T lassen sich Plasmen sehr grob unterscheiden, wie in Abb. 1.1 illustriert ist.

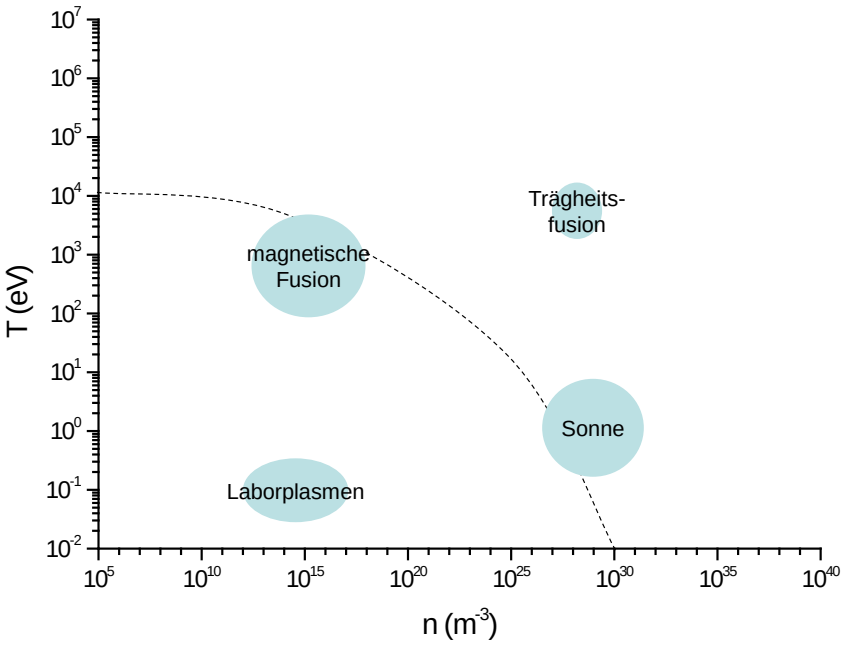


Abbildung 1.1: Einteilung von Plasmen

1.2.2 Debye-Abschirmung

Eingangs wurde ein Plasma als quasineutrales Gas beschrieben. Das bedeutet, daß die Zahl der positiven und negativen Ladungsträger in einem Vo-

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

lumenelement genau gleich sein muß. Doch bis zu welcher Skala gilt diese Aussage?
Betrachten wir einen ruhenden Ionenhintergrund und untersuchen den Fall, daß eine lokale Störung im elektrischen Potential Φ_0 auftritt. In Fig. 1.2 wird der Fall einer zusätzlichen *negativen* Ladung an einem Ort $x = 0$ illustriert. Es entsteht ein neues Gleichgewicht, das die Abstossung der umgebenden Elektronen durch die Anwesenheit des zusätzlichen Elektrons mit dem Rückströmen dieser Elektronen enstrechend einem Dichtegradienten bilanziert (Die Fall eines zusätzlichen Ions am Ort $x = 0$ ist ganz analog).

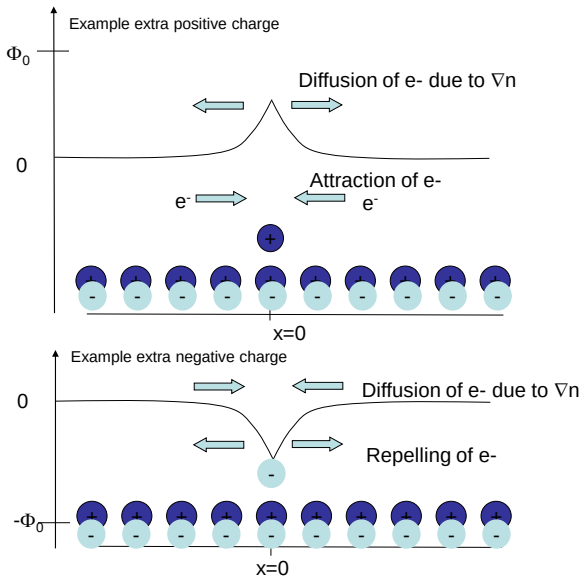


Abbildung 1.2: Debye-Abschirmung

Die Elektronendichte am Ort dieser Störung wird beschrieben durch die **Boltzmann-Beziehung** (wie erst später bewiesen wird):

$$n_e = n_0 e^{\frac{e\Phi(x)}{k_B T}} \tag{1.6}$$

dies wird in die Poisson-Gleichung eingesetzt:

$$\epsilon_0 \frac{d^2\Phi}{dx^2} = e n_0 \left(e^{\frac{e\Phi(x)}{k_B T}} - 1 \right) \tag{1.7}$$

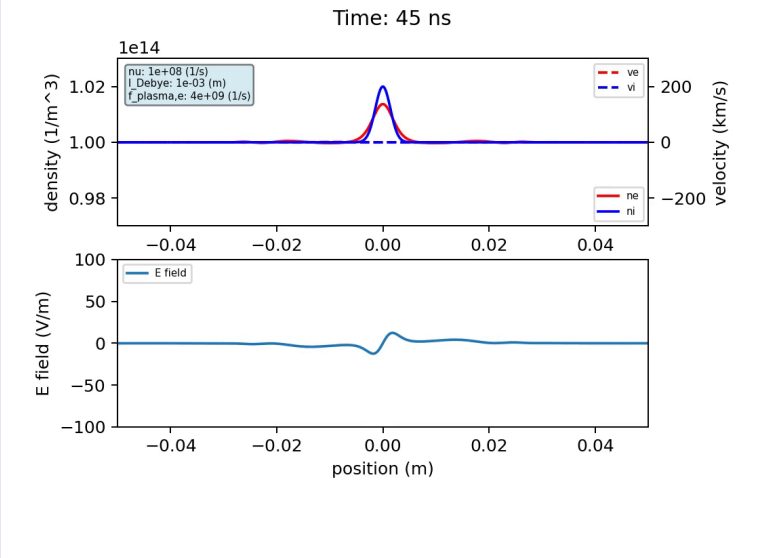
für $\frac{e\Phi}{k_B T} \ll 1$ gilt:

$$\epsilon_0 \frac{d^2\Phi}{dx^2} = e n_0 \left(1 + \frac{e\Phi(x)}{k_B T} + ... - 1 \right) \simeq e n_0 \frac{e\Phi}{k_B T} \tag{1.8}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Animation

Youtube: Debye Abschirmung



Die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 k_B T}\Phi \tag{1.9}$$

ergibt

$$\Phi = \Phi_0 e^{-\frac{|x|}{\lambda_D}} \tag{1.10}$$

mit der sogenannten **Debyelänge**:

$$\boxed{\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T}{n_0 e^2}\right)^{1/2}} \tag{1.11}$$

d.h. die Quasineutralität ist erfüllt, wenn der betrachtete Bereich größer als die Debyelänge ist. Damit ist eine Größenskala definiert, ab der man von einem Plasma sprechen kann. Das Volumen mit Radius Debyelänge bezeichnet man als **Debye-Kugel**. Kollektives Verhalten ist nur gewährleistet, wenn die Zahl der Teilchen in dieser Debye-Kugel $\gg 1$ ist.

$$N_D = \frac{4\pi}{3}\lambda_D^3 n \gg 1 \tag{1.12}$$

Mikroskopisch betrachtet, wird allerdings sichtbar, daß ein Plasma nur quasineutral ist, aber aus geladenen Teilchen besteht: ein Atom oder Molekül im

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Plasma "sieht" die Ladungsträger Elektronen und Ionen in der Umgebung. Diese erzeugen ein fluktuierendes elektrisches Feld am Ort dieses Atoms oder Moleküls, das **Mikrofeld**. Dies ist wichtig für die Emission und Absorption von Strahlung, da das elektrische Mikrofeld zu einer Starkaufspaltung der Emissions- und Absorptionslinien führt. Die Stoßwechselwirkung eines angeregten Atoms oder Moleküls mit den umgebenden Elektronen und Ionen führt zudem zu einer Verringerung der Lebensdauer des angeregten Zustands und damit zu einer Linienverbreiterung, der Starkverbreiterung[1].

1.2.3 Plasmafrequenz

Betrachten wir ein Plasmavolumen, bei dem die Elektronen als ganzes vor dem Hintergrund der ruhenden Ionen um eine Verschiebung δ ausgelenkt werden, gemäß Abb. 1.3:

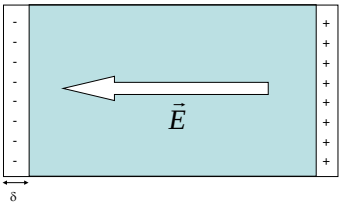


Abbildung 1.3: Plasma-Frequenz

Das elektrische Feld einer Flächenladung ist:

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} en\delta \tag{1.13}$$

Die Bewegungsgleichung der Elektronen in diesem Feld ist:

$$m_e \frac{d\delta^2}{d^2t} = -eE \tag{1.14}$$

damit ergibt sich eine Schwingungsgleichung gemäß

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m}\delta = 0 \tag{1.15}$$

die Eigenfrequenz dieser Schwingung ist die sogenannten **Plasmafrequenz**:

[1] Ähnliche Störeffekte werden durch Stöße des strahlenden Atoms mit Neutralen erzeugt, die zur sogenannten Druckverbreiterung und Resonanzverbreiterung führen.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\boxed{\omega_p = \left(\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}\right)^{1/2}} \tag{1.16}$$

Mit diesen Vorbetrachtungen können wir jetzt ein Plasma genauer definieren. Drei Bedingungen müssen erfüllt sein:

- $L > \lambda_D$

  Die Ausdehnung L des Plasmas muß größer als die Debyelänge sein, um Quasineutralität zu gewährleisten.

- $N_D \gg 1$

  Die Zahl der Teilchen in der Debye-Kugel muß sehr viel größer als 1 sein, um kollektives Verhalten des Plasmas zu erhalten.

- $\omega\tau \gg 1$

  Das Produkt aus Plasmafrequenz mit der Stoßzeit mit Neutralen τ sollte sehr viel größer als 1 sein, damit die elektrostatische Wechselwirkung über der normalen Gaskinetik dominiert.

1.3 Einteilung von Plasmen

Plasmen können grob in mehrere Kategorien eingeteilt werden:

- **ideales / nicht ideales Plasma**

  Vergleicht man die potentielle Energie zwischen zwei Ladungsträgern:

  $$\Phi_{AB} = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0 r_{AB}} \tag{1.17}$$

  mit der thermischen Energie $E_{th} = \frac{3}{2}k_B T$ so spricht man von

  $$\text{idealen Plasmen} \qquad \Phi_{AB} \ll E_{th} \tag{1.18}$$

  $$\text{nicht} - \text{idealen Plasmen} \qquad \Phi_{AB} \gg E_{th} \tag{1.19}$$

  Da der Abstand r_{ab} mit der Dichte n wie $\propto n^{-1/3}$ skaliert gilt für die Grenze zwischen idealem Plasma und nicht idealem Plasma $T \propto n^{1/3}$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

- **Entartung**

  Entartung tritt auf, wenn die Dichte der Ladungsträger so hoch wird, daß das Pauli-Verbot einen nennenswerten Anteil an der repulsiven Kraft hat. Dies gilt, falls die Fermi-Energie größer als die thermische Energie wird:

$$E_{Fermi} > E_{th} = \frac{3}{2} k_B T \tag{1.20}$$

  Mit der Fermi-Energie

$$E_{Fermi} = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n_e)^{2/3} \tag{1.21}$$

  ergibt sich für die Grenze zwischen entarteten und nicht entarteten Plasmen $T \propto n^{2/3}$

- **relativistisch**

  Bei sehr hohen Teilchenenergien schließlich ist es notwendig relativistisch zu rechnen. Dies ist der Fall für eine thermische Energie, die größer als die Ruhemasse ist:

$$m_e c^2 \leq \frac{3}{2} k_B T \tag{1.22}$$

Diese Einteilung ist graphisch in Abb.1.4 veranschaulicht.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

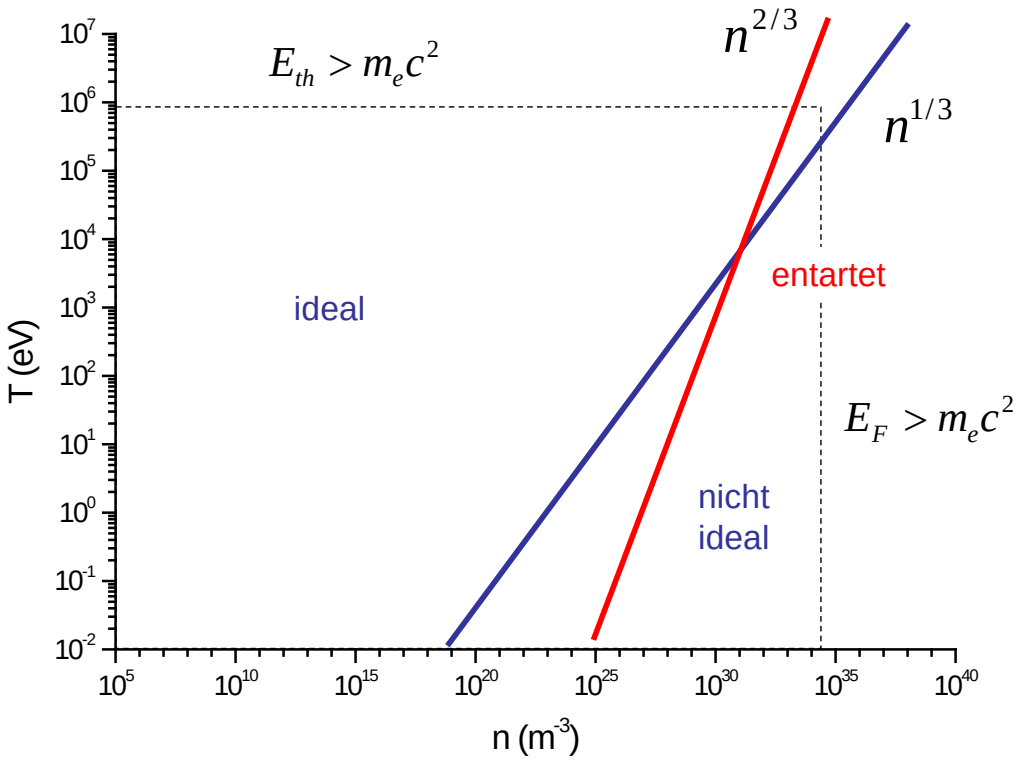


Abbildung 1.4: Einteilung von Plasmen

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Kapitel 2

Beschreibung von Plasmen

Um die Physik eines Plasmas zu beschreiben benötigen wir das entsprechende Rüstzeug. Wesentliche Einflußgrößen sind elektrische und magnetische Felder, die die Bewegung der Teilchen gemäß der Lorentzkraft bestimmen. Dies birgt allerdings eine große Komplexität, da die induzierte Bewegung der Teilchen ihrerseits neue interne elektrische und magnetische Felder erzeugt, die wiederum das Verhalten bestimmen. D.h. das Problem kann nur selbstkonsistent gelöst werden.

Wichtigste Komponente zur Kontrolle von Plasmen sind Magnetfelder, da sie den Teilchen eine Vorzugsrichtung aufprägen. D.h. mit einem speziellen Magnetfeld lassen sich Plasmen gut einschließen. Allerdings kann dieser Einschluß durch diese selbst erzeugten elektromagnetischen Felder stark geändert werden. Die prinzipiellen Konzepte zum erfolgreichen magnetischen Einschluß eines Plasmas werden in diesem Kapitel demonstriert.

Bei der Beschreibung eines Plasmas kann man vom einzelnen Teilchen ausgehen und seine Bewegung in magnetischen und elektrischen Feldern berechnen. In dieser Sichtweise bewegt man sich mit dem Teilchen mit. Will man ein ganzes Plasma beschreiben ist allerdings ein Vielteilchenbild praktischer, wobei ein ortsfestes Koordinatensystem gewählt wird und in ein Volumenelement im Phasenraum (Ort und Geschwindigkeit) Teilchen ein- und austreten können.

Bei der Beschreibung von Plasmen kann man folgende Hierarchie aufstellen: (i) Einzelteilchenbild als Lösung der Bewegungsgleichung eines Teilchens gegeben durch die Lorentzkraft; (ii) Vielteilchenbild als Bestimmung der Verteilungsfunktion im Phasenraum

Ort und Geschwindigkeit (Vlasov bzw. Boltzmann-Gleichung); (iii) Vielteilchenbild als Bestimmung der Dichte und der Schwerpunktsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit (Fluidbild, Momente der Boltzmann-Gleichung).

2.1 Einzelteilchenbild

Im Einzelteilchenbild löst man die Newton'schen Bewegungsgleichung für die Bewegung eines geladenen Teilchens in äußeren Kraftfeldern.

2.1.1 Teilchendriften

konstante E und B-Felder

Ausgangspunkt der Beschreibung von Plasmen ist zunächst die Bewegung eines einzelnen geladenen Teilchens in elektrischen und magnetischen Felder. Hierfür bestimmend ist immer die **Lorentz-Kraft**:

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})} \tag{2.1}$$

- **konstantes B Feld**

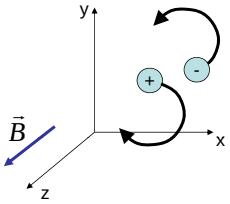


Abbildung 2.1: Koordinaten für die Teilchenbewegung in konstantem B-Feld

Nehmen wir an, wir haben nur ein konstantes B-Feld in z-Richtung. Die Bewegungsgleichung in der x,y Ebene lauten demnach:

$$m\frac{dv_x}{dt} = qB_z v_y \tag{2.2}$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -qB_z v_x \tag{2.3}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

einmal nach der Zeit ableiten und in einander einsetzen liefert:

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y \tag{2.4}$$

Dies entspricht einer Schwingungsgleichung mit der Kreisfrequenz ω_c der **Zyklotronfrequenz**:

$$\boxed{\omega_c = \frac{|q|B}{m}} \tag{2.5}$$

Die Lösung der Schwingungsgleichung erhält man mit einem Ansatz gemäß:

$$v_{x,y} = v_\perp e^{\pm i\omega_c t} \tag{2.6}$$

Einmal ableiten ergibt die Zeitabhängigkeit der Ortskoordinate:

$$x - x_0 = -i\frac{v_\perp}{\omega_c} e^{\pm i\omega_c t} \tag{2.7}$$

Mit der Definition des **Larmor-Radius** als

$$\boxed{r_L = \frac{v_\perp}{\omega_c} = \frac{m v_\perp}{|q|B}} \tag{2.8}$$

und

$$x - x_0 = r_L \sin \omega_c t \tag{2.9}$$

bzw.

$$y - y_0 = \pm r_L \cos \omega_c t \tag{2.10}$$

Die Bewegung der Ladungsträger in dem magnetischen Feld hat immer **diamagnetischen** Charakter. D.h. das magnetische Feld, das durch die Kreisbewegung der Ionen oder Elektronen erzeugt wird, ist dem von außen vorgegebenen Magnetfeld immer entgegen gesetzt.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

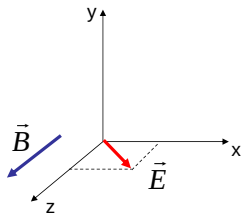


Abbildung 2.2: Koordinaten für die Teilchenbewegung in konstantem E- und B-Feld

- **konstantes B-Feld und E-Feld**

  Im Fall von konstanten E- und B-Feldern ergeben sich folgende Gleichungen gemäß der Lorentz-Kraft:

$$\dot{v}_z = \frac{q}{m} E_z \tag{2.11}$$

$$\dot{v}_x = \frac{q}{m} E_x \pm \omega_c v_y \tag{2.12}$$

$$\dot{v}_y = \mp \omega_c v_x \tag{2.13}$$

  Die Vorzeichen berücksichtigen jeweils den Fall für Ionen und Elektronen. Dies ist hier notwendig, da in der Definition von ω_c der Betrag der Ladung $|q|$ gewählt wurde.

  Gl. 2.12 einmal ableiten und in Gl. 2.13 einsetzen liefert:

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x \tag{2.14}$$

  ebenso

$$\ddot{v}_y = \mp \omega_c \left[\frac{q}{m} E_x \pm \omega_c v_y \right] = -\omega_c^2 \left(\frac{E_x}{B_z} + v_y \right) \tag{2.15}$$

  dies ist äquivalent zu einer Differentialgleichung für die Variable

$$\tilde{v}_y = \frac{E_x}{B_z} + v_y \tag{2.16}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

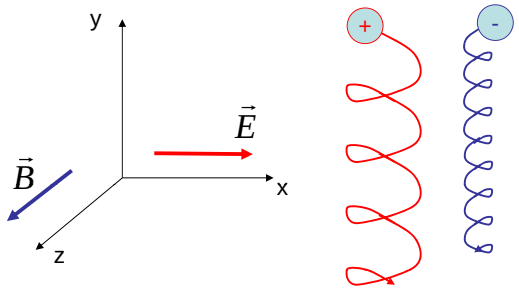


Abbildung 2.3: $\vec{E} \times \vec{B}$ Drift

Der erste Term entspricht einer **Driftbewegung**. Dies wird in Abb. 2.3 veranschaulicht.

Formal kann man diese Driftbewegung direkt aus der Lorentz-Kraft ableiten, in dem man nicht die Trajektorie direkt betrachtet, sondern die Bewegung des sog. **Führungszentrums**, d.h. des Schwerpunktes der Gyrationsbahn. Die Zeitableitung beschreibt explizit diese Gyrationsbewegung. Falls man nur an der Drift interessiert ist, kann die linke Seite in Gl. 2.1 zu Null gesetzt werden und man erhält den Ausdruck:

$$0 = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \tag{2.17}$$

jetzt werden beide Seiten mal $\times \vec{B}$ genommen und man erhält

$$0 = \vec{E} \times \vec{B} + (\vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B} \tag{2.18}$$

$$0 = \vec{E} \times \vec{B} - \vec{v}B^2 + \vec{B}(\vec{v}\vec{B}) \tag{2.19}$$

der letzt Term is Null, da die Driftbewegung senkrecht zum Magnetfeld erfolgt. Man erhält schließlich die sogenannte $\vec{E} \times \vec{B}$ **Drift**:

$$\boxed{\vec{v}_{E\times B} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}} \tag{2.20}$$

Diese Drift kann man verallgemeinern indem man das E-Feld durch ein allgemeines äußeres Kraftfeld ersetzt. Mit

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{2.21}$$

erhält man

$$\vec{v}_F = \frac{1}{q}\frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2} \tag{2.22}$$

Als Beispiel sei hier die **Gravitationsdrift** genannt.

$$\boxed{\vec{v}_g = \frac{m}{q}\frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2}} \tag{2.23}$$

Anschaulich bedeuten diese Driften, dass in einem externen Kraftfeld die Ladungsträger je nach Richtung beschleunigt oder abgebremst werden. Dabei ändert sich jedes mal der Larmor-Radius und entsprechend die Bahnkrümmung. Durch die Änderung der Bahnkrümmung driftet das Führungszentrum der Teilchenbewegung.

Die $\vec{E} \times \vec{B}$-Drift soll an drei Beispielen veranschaulicht werden:

- **Magnetron**

  Für die Herstellung von Metallfilmen mittels Plasmaverfahren verwendet man die Zerstäubung einer Metalloberfläche in einem Edelgasplasma. An der Metalloberfläche wird eine Spannung angelegt und die auftreffenden Ionen werden in dem elektrischen Feld beschleunigt und schlagen Metallatome aus dieser Fläche heraus. Die freien Metallatome schlagen sich dann auf einem Werkstück wieder nieder. Die Zerstäubung kann effektiver gestaltet werden, wenn man hinter der Metalloberfläche Magneten anbringt, wie in Abb. 2.4 veranschaulicht. Die Elektronen werden auf Bahnen gemäß der $E \times B$-Bewegung gezwungen. Dies entspricht einem besseren Plasmaeinschluss und sehr hohe Elektronendichten können erzeugt werden. Damit wird auch die Ionendichte hoch und dementsprechend die Zerstäubungsrate.

- **Hall-Thruster**

  Als Triebwerke für die Lageregelung von Satelliten verwendet man in der Regel sog. Hall-Thruster. Diese Ionentriebwerke erzeugen ein Plasma in einem konzentrischen Hufeisenmagneten. Wie in

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

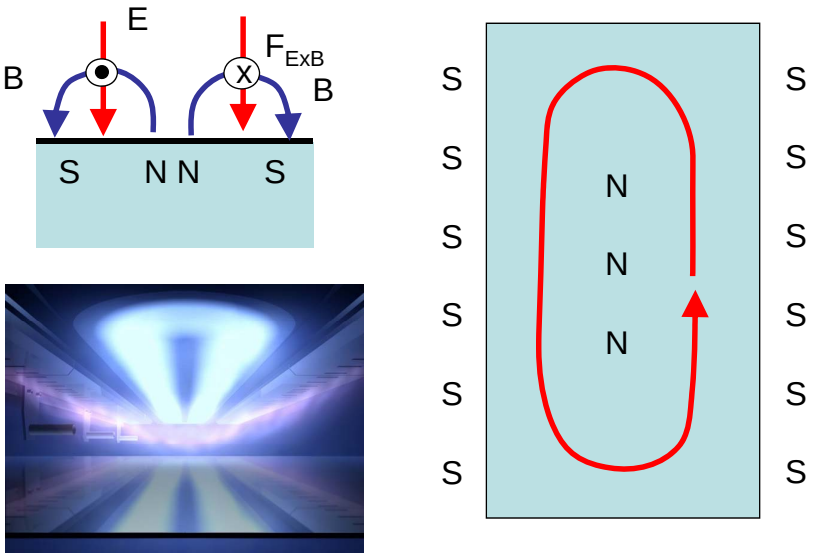


Abbildung 2.4: $E \times B$ Bewegung der Elektronen in einer Magnetron Entladung. Bild: Uni Magdeburg

Abb. 2.5 verdeutlicht, wird ein elektrisches Feld überlagert. Dadurch werden die Elektronen auf $E \times B$ Bahnen in dem Hufeisenmagneten gezwungen, während die Ionen von dem elektrischen Feld beschleunigt werden und durch ihren Impulsübertrag für den Vorschub sorgen. Da geladene Teilchen ausgesandt werden muß der Ladungsverlust des Satelliten kompensiert werden. Aus diesem Grund werden dem Ionenstrahl noch Elektronen beigemengt um diesen zu neutralisieren.

– **MHD Generator**

Eine weitere Anwendung der Kräfte auf geladene Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern ist der MHD Generator (MHD, Magneto-Hydro-Dynamik), wie in Abb. 2.6 illustriert. Mit diesem Generator läßt sich chemische Energie in elektrische Energie umwandeln. Zunächst betrachtet man einen Brenner bzw. Flamme in der ein Reaktionsgemisch, wie zum Beispiel Kohlenwasserstoffe plus Sauerstoff oder Wasserstoff und Sauerstoff verbrannt wird. Ziel ist es zum einen einen hohen Ionisationsgrad aber auch eine hohe Ausströmgeschwindigkeit zu realisieren. Strömt dieses

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

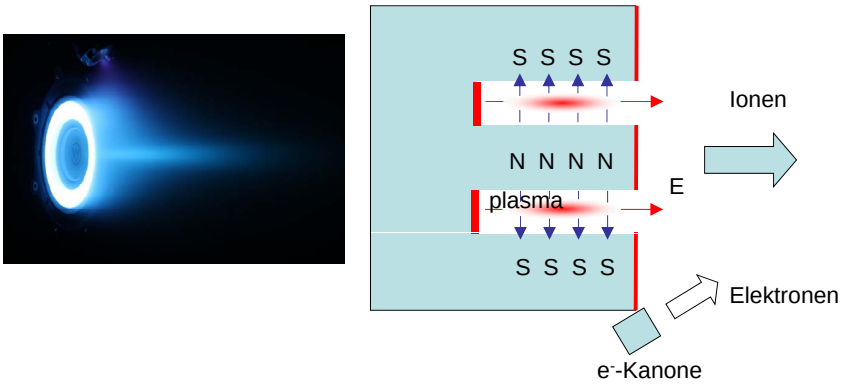


Abbildung 2.5: Hall-Thruster. Bild: Alta-Space

thermische Plasma durch ein Magnetfeld, findet eine Ladungsträgertrennung gemäß der Lorentzkraft statt. Diese Ladungen werden an Elektroden aufgefangen und können in einem externen Stromkreis einen Verbraucher antreiben.

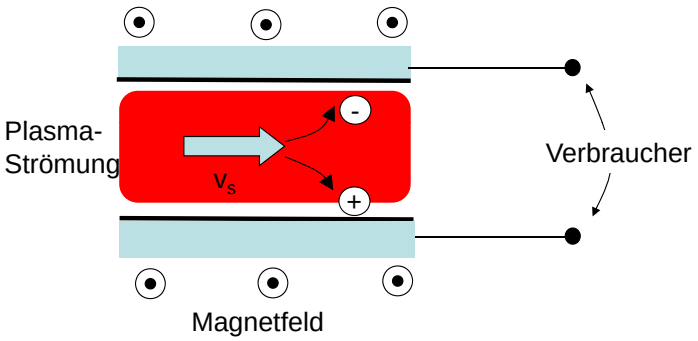


Abbildung 2.6: In einem MHD-Generator strömt ein Plasma in einem starken Magnetfeld. Es entsteht dabei eine Ladungstrennung. Dies entspricht einer Umwandlung von Bewegungsenergie in elektrische Energie.

ungleichförmige Felder

Im folgendem nehmen wir an, dass die Felder nicht mehr im Raum konstant vorliegen, sondern eine räumliche Variation haben.

- **Gradient des B-Feldes senkrecht zur Richtung von B**

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

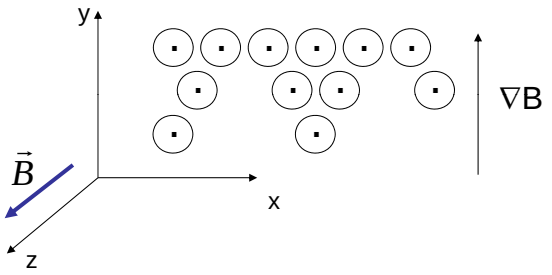


Abbildung 2.7: Koordinaten für die Bewegung im Gradienten des B Feldes

Wir nehmen an, dass nur ein B-Feld vorliegt und dass der Gradient des B-Feldes senkrecht zum B-Feld selbst ist, wie in Abb. 2.7 angedeutet. Der Gradient im B-Feld wird durch eine Taylor-Entwicklung beschrieben:

$$B_z(y) = B_0 + y\frac{\partial B}{\partial y} \tag{2.24}$$

Es entsteht eine zusätzliche Komponente der Kraft in y-Richtung, da sich in dieser Richtung das B-Feld ändert:

$$F_y = -qv_x B_z(y) \tag{2.25}$$

wir ersetzen $v_x = v_\perp \cos\omega_c t$ und $y = \pm r_L \cos\omega_c t$. Damit erhält man:

$$F_y = -qv_\perp \cos\omega_c t \left[B_0 \pm r_L \cos\omega_c t \frac{\partial B}{\partial y}\right] \tag{2.26}$$

die Mittelung über einen Umlauf ergibt

$$\langle\cos^2\omega_c t\rangle = \frac{1}{2} \qquad \langle\cos\omega_c t\rangle = 0 \tag{2.27}$$

damit erhält man

$$F_y = \mp qv_\perp r_L \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial y} \tag{2.28}$$

setzt man dieses wieder in die allgemeine Beziehung 2.22 ein, so erhält man:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$v_{\nabla B} = \mp v_\perp r_L \frac{1}{2} \frac{\nabla B \times \vec{B}}{B^2} \tag{2.29}$$

oder nach Vertauschen des Kreuzproduktes

$$\boxed{v_{\nabla B} = \pm v_\perp r_L \frac{1}{2} \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^2}} \tag{2.30}$$

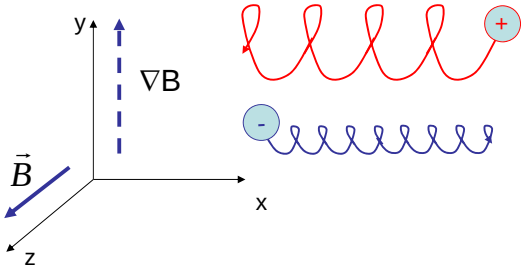


Abbildung 2.8: Gradient B Drift

Diese ∇ **B-Drift** Bewegung sei anschaulich in Abb. 2.8 illustriert. Sie entsteht hauptsächlich durch eine Änderung des Larmor-Radius des gyrierenden Teilchens. Diese Drift hängt allerdings von der Ladung des Teilchens ab im Unterschied zur $E \times B$ Drift.

- **gekrümmte B-Feldlinien**

  Falls die B-Feld Linien gekrümmt sind, folgt das Führungszentrum der Teilchentrajektorie dieser Bahn. Dadurch entsteht eine Zentrifugalkraft, die wiederum zu einer Drift führt, **der Krümmungsdrift**. Die Zentrifugalkraft kann gemäß Abb. 2.9 durch

$$\vec{F_{cf}} = m \frac{v_\parallel^2}{R_c} \hat{r} = m \frac{v_\parallel^2}{R_c^2} \vec{R_c} \tag{2.31}$$

  beschrieben werden. Demnach ergibt die **Krümmungsdrift** mit Gl.2.22:

$$\boxed{\vec{v_R} = \frac{1}{q} m \frac{v_\parallel^2}{R_c^2} \frac{\vec{R_c} \times \vec{B}}{B^2}} \tag{2.32}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

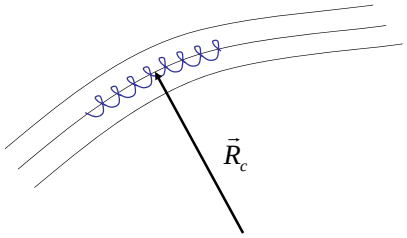


Abbildung 2.9: Durch die Zentrifugalkraft wird eine gleichförmige Kraft nach außen. In Kombination mit dem B-Feld erfährt das Teilchen dann eine Krümmungsdrift senkrecht zur Ebene.

Diese Teilchendriften haben fundamentale Konsequenzen für die Feldkonfiguration in einem torodialen Plasma. Durch die Krümmung der Magnetfeldlinien und den Gradienten im Magnetfeld in einem Torus wird eine Ladungsträger-Trennung erzeugt. Dies führt zu einem elektrischen Feld, das wiederum zu einer $E \times B$-Drift führt, die das Plasma nach aussen treibt (Abb. 2.10. Diesem kann man nur entgegen wirken indem man die Magnetfeldlinien verschert, d.h. eine Magnetfeldlinie läuft nicht einfach um den Torus in torodialer Richtung sondern auch in polodialer Richtung. Dies ist genauer im Kapitel 9 erläutert.

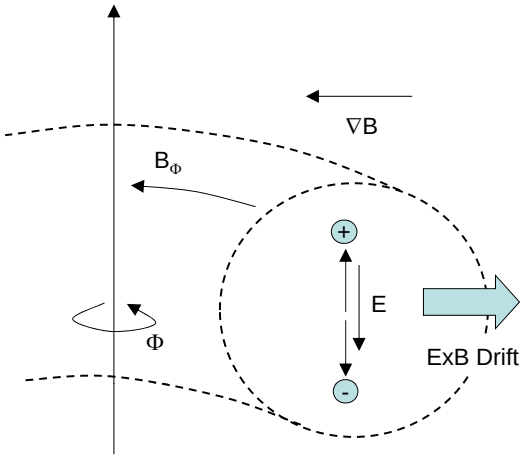


Abbildung 2.10: Driften in einer torodialen Anordnung

- **Gradient des B-Feldes parallel zur Richtung von B**

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Betrachten wir den Fall eines Gradienten des B-Feldes parallel zum B-Feld. Ausgangspunkt ist wieder die Lorentz-Kraft:

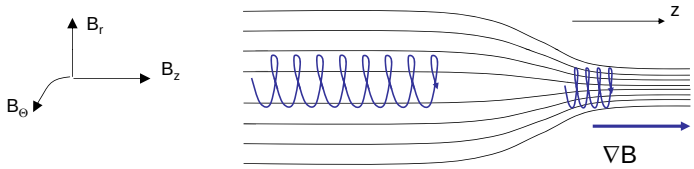


Abbildung 2.11: Bewegung parallel zu B und ∇B. Es entsteht ein magnetischer Spiegel durch eine Region hohen Magnetfeldes.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{2.33}$$

Die zylindersymmetrische Konfiguration wird durch die drei Magnetfeldkomponenten B_r, B_z und B_Θ dargestellt. Die Lorentzkraft in diesem Koordinatensystem ist:

$$F_r = q\left(v_\Theta B_z - v_z B_\Theta\right) \tag{2.34}$$
$$F_\Theta = q\left(-v_r B_z + v_z B_r\right) \tag{2.35}$$
$$F_z = q\left(v_r B_\Theta - v_\Theta B_r\right) \tag{2.36}$$

wobei $B_\Theta = 0$ gilt. Der Gradient im B-Feld in z-Richtung läßt sich mit dem radialen B-Feld verknüpfen via:

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \tag{2.37}$$

was in Zylinderkoordinaten für $B_\Theta = 0$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r B_r + \frac{\partial B}{\partial z} = 0 \tag{2.38}$$

entspricht. Dies läßt sich integrieren unter der Näherung dass $\frac{\partial B}{\partial z}$ nur schwach von r abhängt.

$$r B_r = -\int_0^r r \frac{\partial B}{\partial z} dr = -\frac{1}{2} r^2 \left.\frac{\partial B}{\partial z}\right|_{r=0} \tag{2.39}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Damit läßt sich Gl. 2.36 einfach schreiben als

$$F_z = \frac{1}{2} q \vec{v}_\Theta \vec{r} \frac{\partial B}{\partial z} \tag{2.40}$$

mit $v_\Theta = \mp v_\perp$ und dem Larmor-Radius

$$r_L = \frac{m v_\perp}{|q| B} \tag{2.41}$$

erhält man schließlich

$$\bar{F}_z = -\frac{1}{2} \frac{m v_\perp^2}{B} \frac{\partial B}{\partial z} \tag{2.42}$$

Dies kann geschrieben werden als

$$\bar{F}_z = -\mu \frac{\partial B}{\partial z} \tag{2.43}$$

mit dem **magnetischen Moment** μ:

$$\boxed{\mu = \frac{1}{2} \frac{m v_\perp^2}{B}} \tag{2.44}$$

Dieses magnetische Moment ist eine Erhaltungsgröße der Bewegung des geladenen Teilchens in dem Magnetfeld. Dies wird im folgenden gezeigt. Gehen wir zunächst von der Bewegungsgleichung parallel zur z-Richtung aus:

$$m \frac{dv_\parallel}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial z} \tag{2.45}$$

beide Seiten werden mit $v_\parallel$ multipliziert

$$m v_\parallel \frac{dv_\parallel}{dt} = -\mu v_\parallel \frac{\partial B}{\partial z} = -\mu \frac{dz}{dt} \frac{\partial B}{\partial z} = -\mu \frac{\partial B}{\partial t} \tag{2.46}$$

$v_\parallel$ wird ersetzt durch $\frac{dz}{dt}$. Die linke Seite läßt sich umformen und man erhält:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_\parallel^2 \right) = -\mu \frac{\partial B}{\partial t} \tag{2.47}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Jetzt benötigen wir noch als Vergleich die Betrachtung der Gesamtenergie, die konstant bleibt, da die Lorentz-Kraft immer senkrecht zu $\vec{v}$ wirkt. Dies liefert:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \mu B\right) = 0 \tag{2.48}$$

Dies ergibt demnach

$$-\mu\frac{dB}{dt} + \frac{d}{dt}(\mu B) = 0 \tag{2.49}$$

mit der Produktregel für den zweiten Term bleibt nur noch folgende Beziehung übrig:

$$B\frac{d\mu}{dt} = 0 \tag{2.50}$$

Da das B-Feld gegeben ist, muß die Ableitung des magnetischen Moments nach der Zeit Null geben. Demnach bleibt das magnetischen Moment der Teilchenbewegung konstant bei einer Bewegung entlang des B-Feld Gradienten.

Diese Konstanz des magnetischen Moments kann man anschaulich an sogenannten Spiegelfeldern verdeutlichen gemäß Abb. 2.12.

Betrachten wir ein Teilchen, daß am Ort minimalen B-Feldes B_0 eine Geschwindigkeit $v_{\parallel,0}$ parallel und $v_{\perp,0}$ senkrecht zum Magnetfeld hat. Am Ort maximalen B-Feldes seien die Geschwindigkeiten $v_{\parallel,m}$ parallel und $v_{\perp,m}$ senkrecht zum Magnetfeld. Die Konstanz des magnetischen Moments verlangt dass:

$$\frac{1}{2}mv_{\perp,0}^2\frac{1}{B_0} = \frac{1}{2}mv_{\perp,m}^2\frac{1}{B_m} \tag{2.51}$$

daraus folgt:

$$\frac{B_m}{B_0} = \frac{v_{\perp,m}^2}{v_{\perp,0}^2} \tag{2.52}$$

wenn wir annehmen, daß das Teilchen am Ort maximalen Magnetfeldes in axialer Richtung zum Stillstand kommt, so ergibt die Energieerhaltung:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

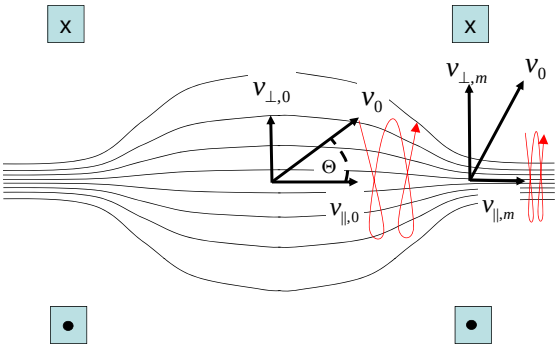


Abbildung 2.12: Magnetische Flasche als Kombination zweier magnetischer Spiegel. Im Zentrum sei das Feld B_0 und auf der Achse in der Mitte der Spule B_m. Die Geschwindigkeit der Teilchen sei v_0. Bei der Bewegung durch die magnetische Flasche tauschen sich die Komponenten v_{perp} und $v_\parallel$ aus, während v_0 konstant bleibt.

$$v_{\perp,0}^2 + v_{\parallel,0}^2 = v_{\perp,m}^2 \equiv v_0^2 \tag{2.53}$$

Damit ist:

$$\frac{B_0}{B_m} = \frac{v_{\perp,0}^2}{v_0^2} = \sin^2\Theta_m = \frac{1}{R_m} \tag{2.54}$$

mit R_m dem sogenannten **Spiegelverhältnis**. Während der Bewegung in diesem magnetischen Spiegel bleibt die Gesamtenergie des Teilchens gleich, da das Magnetfeld immer nur senkrecht zur Geschwindigkeit wirkt. Auf seiner Bahn wird nur Parallel- mit Senkrecht-Energie ausgetauscht. Der Winkel zwischen dem Vektor $\vec{v}$ und der Parallel-Komponente allerdings ändert sich, der sog. **Pitchwinkel**. Im Zentrum der Spiegelanordnung bei geringstem Magnetfeld hat das Teilchen maximale Parallel-Energie und am Ort maximalen B-Feldes hat das Teilchen maximale Senkrecht-Energie.

Wie ändert sich jetzt der Larmorradius bei der Bewegung durch das Spiegelfeld. Nachdem das magentische Moment konstant bleibt ist $v_\perp^2 \propto B$, d.h. mit steigendem B-Feld nimmt $v_\perp$ nur langsam zu. Mit $r_L = mv_\perp/(qB)$ bedeutet dies, dass r_L im Bereich des Spiegelpunktes kleiner ist als im Zentrum der Anordnung.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

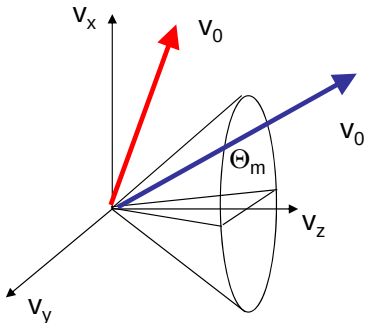


Abbildung 2.13: Teilchen deren Geschwindigkeitsvektor in der Mitte der Spiegelmaschine innerhalb eines Verlustkegels mit Öffnungswinkel Θ_m liegen, können die Spiegelmaschine verlassen.

Ob ein Teilchen in diesem Spiegelfeld gefangen bleibt, wird durch die Startbedingungen festgelegt. Liegt der Vektor der Teilchengeschwindigkeit innerhalb des sog. **Verlustkegels**, so kann das Teilchen die Spiegelanordnung verlassen.

Allerdings ist der Einschluß von Teilchen auch unabhängig von der Betrachtung mit dem Verlustkegel nicht optimal. In einer Spiegelmaschine gibt es Bereiche günstiger und ungünstiger Krümmung. In der Mitte der Spiegelmaschine führt die Krümmungsdrift zu einer Ladungstrennung bei der das entstehende elektrische Feld in Kombination mit dem Magnetfeld zu einer $E \times B$-Drift führt, die auswärts gerichtet ist. Sie treibt das Plasma auseinander wie in Abb.2.14 illustriert. An den Enden der Spiegelmaschine zeigt die Krümmung der Teilchenbahnen in die andere Richtung und die resultierende $E \times B$-Drift zeigt nach innen. Dies verbessert den Einschluß.

Demnach erhält man je nach der Krümmung der Grenzfläche zwischen Plasma und Vakuum ein stabiles Gleichgewicht oder eine instabile Konfiguration (siehe Abb. 2.15).

Die Stabilität der Grenzfläche zwischen Plasma und Vakuum hat auch grundlegende Konsequenzen für die Form der torodialen Einschlußes in der magnetischen Fusion. In der magnetischen Fusion laufen die Magnetfeldlinien um einen Torus. Hierbei sind diese Magnetfeldlinien zusätzlich *verschert*, wie weiter unten erläutert wird, so daß eine spezifische Magnetfeldlinie erst nach mehreren Umläufen wieder in sich

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

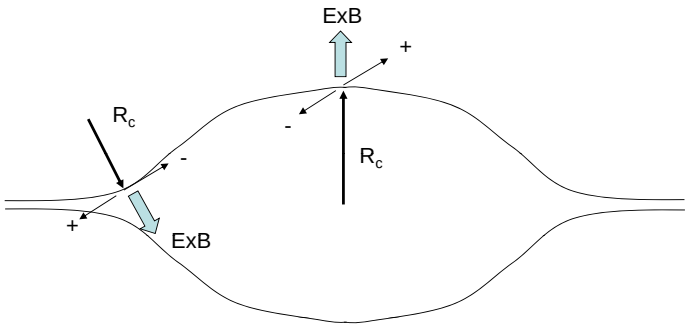


Abbildung 2.14: Bereiche günstiger und ungünstiger Krümmung

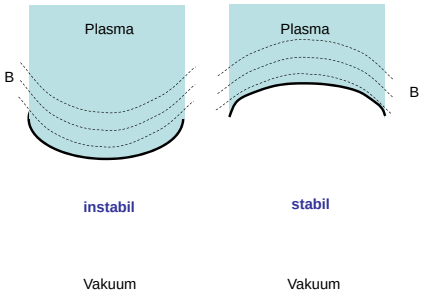


Abbildung 2.15: Stabilität einer Grenzfläche zwischen Plasma und Vakuum hängt von seiner Krümmung ab.

selbst zurückläuft. Die Art und Weise wie die Magnetfeldlinien aber um den Torus gewickelt werden kann durch die Experimentführung oder die Form der äußeren Spulen vorgegeben werden.

In einem Torus sind die Teilchenbahnen, die außen am Torus entlang führen, ungünstig, während die Teilchenbahnen an der Innenseite stabil sind. Aus diesem Grund versucht man das Magnetfeld so zu formen, daß eine umlaufenede Magnetfeldlinie möglichst oft auf der Innenseite um den Torus herum führt und nur wenige Mal auf der Außenseite. Diese ergibt einen eher dreieckigen Querschnitt der Torusfläche wie in Abb. 2.16 verdeutlicht.

Um die ungünstige Krümmung im Fall einer linearen Spiegel-Anordnung zu minimieren, besteht die Überlegung eine sog. Cusp Anordnung (Abb. 2.17) zu verwenden. Dies erhöht die Stabilität. Aller-

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

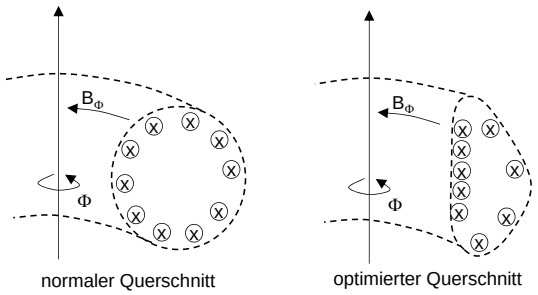


Abbildung 2.16: Optimierung des Querschnitts eines torusförmigen Plasmas.

dings hat diese Konfiguration zwei Nachteile: zum einen ergeben sich neben den Endverlusten auch zusätzliche Verluste am Umfang der Anordnung. Zum zweiten ist in dieser Anordnung ein sog. **X-Punkt** entstanden, am Ort mit Magnetfeld 0. Tritt ein Teilchen durch diesen Punkt, verliert das magnetische Moment seine Bedeutung und bleibt damit nicht mehr Erhaltungsgröße. D.h. kleine Störungen können dazu führen, dass das Teilchen in den Verlustkegel gelangen.

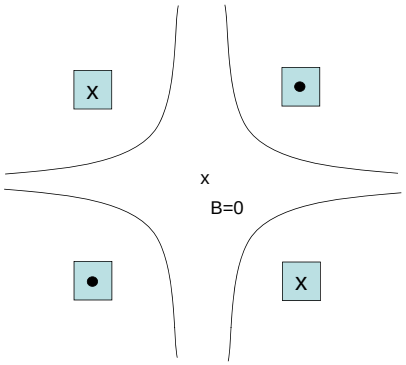


Abbildung 2.17: Cusp Anordnung eines magnetischen Spiegels

- **ungleichförmiges E-Feld**

  Bei einem räumlich ungleichförmigen elektrischen Feld tritt eine Drift nur dann auf, wenn eine Krümmung (d.h. zweite Ableitung ungleich

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Null) vorhanden ist. Ansonsten hebt sich die Beschleunigung bzw. Abbremsung bei einem Umlauf wieder auf. Dies ist in Abb. 2.18 illustriert.

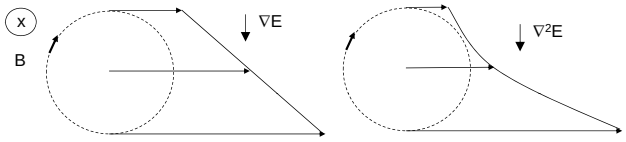


Abbildung 2.18: Drift durch ungleichförmige E-Felder

Die Drift-Geschwindigkeit enthält neben der einfachen $E \times B$ Drift einen zusätzlichen Term proportional zu $\nabla^2 E$.

$$\boxed{v_{\nabla E} = \left(1 + \frac{1}{4} r_L^2 \nabla^2\right) \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}} \tag{2.55}$$

Zeitabhängige Felder

Bei zeitabhängigen Feldern lassen sich zwei Fälle unterscheiden, räumlich konstante, aber zeitlich veränderliche Felder bzw. räumlich und zeitlich variierende Felder:

- *Polarisationsdrift*

  Die **Polarisationsdrift** entsteht durch zeitlich veränderliche elektrische Felder, die aber räumlich konstant sind:

  $$\boxed{\vec{v} = \pm \frac{1}{B\omega_c} \frac{\partial E}{\partial t}} \tag{2.56}$$

  Steigt plötzlich das elektrische Feld, so werden die Ladungsträger zunächst in diese Richtung beschleunigt bevor sich gemäß $\vec{v} \times \vec{B}$ eine Gyration ausbildet. Demnach hat netto eine Drift in Richtung des elektrischen Feldes stattgefunden. Diese Drift ist umso größer je größer die Trägheit (gegeben durch die Masse) ist (siehe Abb. 2.19).

- *ponderomotive Kraft*

  Betrachten wir einen Ladungsträger in einem räumlich und zeitlich veränderlichen Feld und nehmen wir an, daß kein statisches Magnetfeld

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

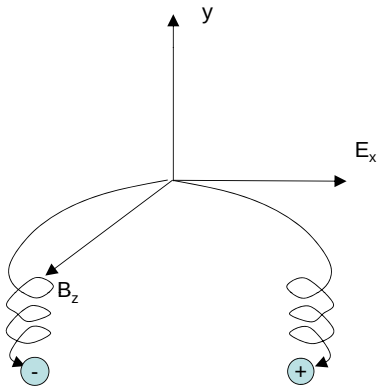


Abbildung 2.19: Polarisationsdrift

B_0 existiert. Ein klassisches Beispiel ist die Bewegung eines Ladungsträgers in einer elektrostatischen Welle (siehe Kapitel Wellen), wie in Abb. 2.20 illustriert. Die Welle erzeugt eine Störung der Quasineutralität gemäß $n(r) = n_0 + n_1(r)$ wodurch ein räumlich und zeitlich veränderliches elektrisches Feld entsteht.

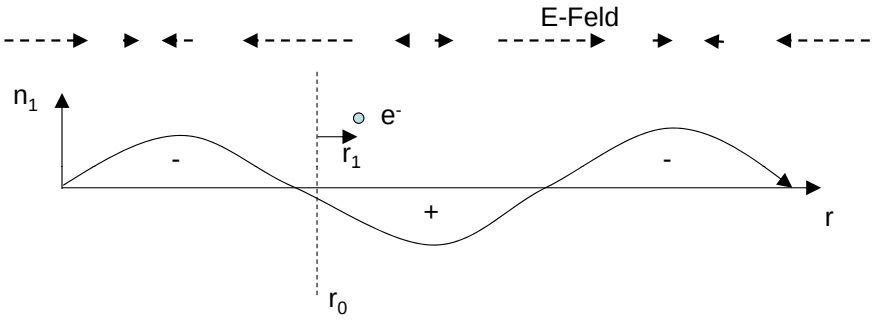


Abbildung 2.20: Bei einer elektrostatischen Welle variiert die Elektronendichte räumlich wie $n(r) = n_0 + n_1(r)$. Durch die örtliche Variation der Ladung entsteht ein räumlich veränderliches elektrisches Feld. Wir betrachten ein Elektron am Ort r_0, das durch das elektrische Feld um r_1 verschoben wird.

Für das elektrische Feld machen wir den Ansatz:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$E(r,t) = E_0(r)\cos\omega t \tag{2.57}$$

Die Bewegungsgleichung, die die Bewegung z.B. eines Elektrons in diesem variablen Feld beschreibt ist die Lorentzkraft:

$$m\frac{dv}{dt} = -e\left[E_0(r)\cos\omega t + v \times B\right] \tag{2.58}$$

Das Magnetfeld entsteht durch Induktion, da sich das elektrische Feld zeitlich ändert. Wir betrachten jetzt die Änderung der Geschwindigkeit und des Ortes in unterschiedlichen Näherungen. Für den Ort schreiben wir:

$$r = r_0 + r_1 \tag{2.59}$$

und die Geschwindigkeit v:

$$v = v_0 + v_1 + v_2 \tag{2.60}$$

In erster Ordnung betrachten wir das Elektron am Ort r_0. Durch die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes haben wir eine Änderung der Geschwindigkeit in erster Ordnung um v_1:

$$m\frac{dv_1}{dt} = -eE_0(r_0)\cos\omega t \tag{2.61}$$

Integrieren wir dies über die Zeit, erhalten wir die Geschwindigkeit v_1:

$$v_1 = -\frac{e}{m\omega}E_0(r_0)\sin\omega t \tag{2.62}$$

bzw. nach einer weiteren Integration die Verschiebung r_1:

$$r_1 = \frac{e}{m\omega^2}E_0(r_0)\cos\omega t \tag{2.63}$$

D.h. die Position des Elektrons oszilliert wie das elektrische Feld um die Ruhelage r_0, und für die zeitliche Mittelung gilt: $\langle v_1\rangle = \langle r_1\rangle = 0$

Mit diesem Ansatz haben wir allerdings nicht berücksichtigt, daß das elektrische Feld sich räumlich ändert. D.h. wir müssen das elektrische Feld entwickeln um die Bewegungsgleichung in zweiter Ordnung lösen zu können:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$E(r,t) = E(r_0,t) + r_1 \nabla\, E(r,t)|_{r=r_0} \tag{2.64}$$

In diesem Fall können wir auch nicht mehr das magnetische Feld vernachlässigen. Wir erhalten als Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit v_2 in erster Ordnung.

$$m\frac{dv_2}{dt} = -e\left[r_1 \nabla E(r) + v_1 \times B_1\right] \tag{2.65}$$

Gleichzeitig betrachten wir das Induktionsgesetz:

$$\nabla \times E(r) = -\dot{B}_1 \tag{2.66}$$

das zeitlich integriert ergibt:

$$\frac{1}{\omega}\nabla \times E_0(r)\sin\omega t = -B_1 \tag{2.67}$$

D.h. mit Gl. 2.62, Gl. 2.63 und Gl. 2.67 in Gl. 2.65 erhalten wir:

$$\begin{aligned} m\frac{dv_2}{dt} &= -e\left[\frac{e}{m\omega^2}E_0(r)\nabla E_0(r)\cos^2\omega t \right. \\ &\quad \left. + \frac{e}{m\omega^2}E_0(r)\times\nabla\times E_0(r)\sin^2\omega t\right] \end{aligned} \tag{2.68}$$

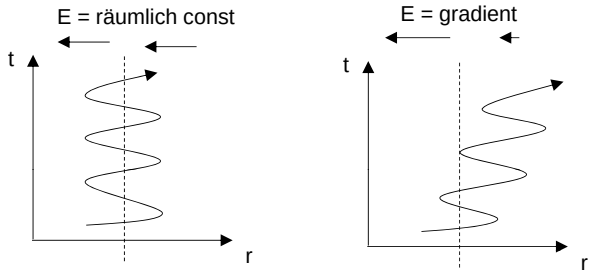


Abbildung 2.21: xt-Diagramm für die Bewegung eines Teilchens in einem zeitlich oszillierenden aber räumlich homogenen bzw. inhomogenen elektrischen Feld.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Die zeitliche Mittelung liefert jeweils $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$. Somit bekommt man:

$$m\langle \frac{dv_2}{dt} \rangle = -\frac{e^2}{m\omega^2} \frac{1}{2} \left[E_0(r) \nabla E_0(r) + E_0(r) \times \nabla \times E_0(r) \right] \tag{2.69}$$

nach dem Auflösen des doppelten Kreuzproduktes fällt der erste Term weg und man bekommt:

$$m\langle \frac{v_2}{dt} \rangle = -\frac{e^2}{m\omega^2} \frac{1}{4} \nabla (E_0(r))^2 \tag{2.70}$$

D.h. es entsteht eine Nettokraft entgegen des Gradienten des elektrischen Feldes. Elektronen werden somit immer zu Regionen niedriger Feldstärke getrieben. Dies sog. **ponderomotive Kraft** hat ihren Ursprung in der Tatsache, dass das oszillierende Elektron auf seiner Bewegung von Bereichen hoher in Bereiche niedriger Feldstärke gelangt. Nachdem die Kräfte im Bereich hoher Feldstärke größer sind, bekommt man keine symmetrische Bewegung sondern eine Drift. Dies ist einem xt-Diagramm in Abb. 2.21 illustriert.

2.1.2 Adiabatische Invarianten

In Spiegelmaschinen gibt es mehrere Erhaltungsgrößen. Wenn diese Erhaltungsgrößen selbst bei *langsamen* zeitlichen Änderungen der Felder konstant bleiben, spricht man von **adiabatischen Invarianten**. Dazu betrachten wir die Änderung des Impulses $\vec{p}$ auf einem geschlossenen Pfad $\vec{q}$ betrachtet. Ist dieses Integral in erster Ordnung konstant, so liegt eine Erhaltungsgröße vor.

$$\oint \vec{p} d\vec{q} \tag{2.71}$$

Als Beispiel nehmen wir das magnetischen Moment. Wir integrieren auf der Gyrationsbahn einen Umlauf gemäß Abb. 2.22.

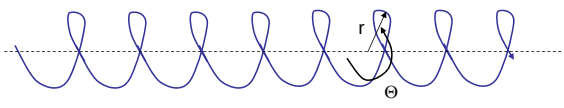


Abbildung 2.22: Erhaltungsgrößen bei der Gyration

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\oint \vec{p}d\vec{q} = \oint mv_\perp r_L d\Theta = 2\pi m v_\perp r_L \tag{2.72}$$

mit dem Larmorradius $r_L = v_\perp/\omega_c$ ergibt sich

$$\oint \vec{p}d\vec{q} = 2\pi \frac{mv_\perp^2}{\omega_c} = 4\pi \frac{m}{|q|}\mu \tag{2.73}$$

demnach ist μ Erhaltungsgröße.

Erste adiabatische Invariante

Allerdings war ja die Behauptung, daß das magnetische Moment auch erhalten bleibt, wenn wir das äußere Feld *langsam ändern*. Bei einer Änderung des Magnetfeldes wird ein elektrische Feld induziert gemäß

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \tag{2.74}$$

In diesem elektrischen Feld erhöht sich die Geschwindigkeit des Teilchens und damit dessen kinetische Energie. Die Änderung der kinetischen Energie E_{kin} mit der Zeit läßt sich mit der beschleunigenden Kraft $F = qE$, die über eine Wegstrecke ds wirkt, verknüpfen via:

$$\frac{dE_{kin}}{dt} = F\frac{ds}{dt} \tag{2.75}$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right) = q\vec{E}\vec{v}_\perp = q\vec{E}\frac{dx}{dt} \tag{2.76}$$

pro Umlauf ändert sich die Energie demnach um einen Betrag:

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right) = \oint_0^{2\pi/\omega_c} q\vec{E}\frac{dx}{dt}dt = \oint_{Umfang} q\vec{E}dx \tag{2.77}$$

mit dem Stokes Satz ergibt sich:

$$\oint_{Umfang} q\vec{E}dx = \int_{Flaeche} q(\nabla \times \vec{E})d\vec{S} = -q\int_{Flaeche} \dot{\vec{B}}d\vec{S} \tag{2.78}$$

mit $\vec{S}$ der Flächenormalen der umschlossenen Gyrationsbahn, Demnach ist:

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right) = \pm q\dot{B}\pi r_L^2 \tag{2.79}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Das Vorzeichen ändert sich, da die Umlaufrichtung um die Fläche S für Ionen und Elektronen unterschiedlich ist. Demnach ändert sich auch die Richtung der Flächennormale der Gyrationsbahn. In Gl. 2.79 steckt die adiabatische Näherung, weil man für das Flächenintegral einfach $r_L^2\pi$ genommen hat, was nur für kleine Werte von $\dot{B}$ richtig ist, wie in Abb. 2.23 erläutert.

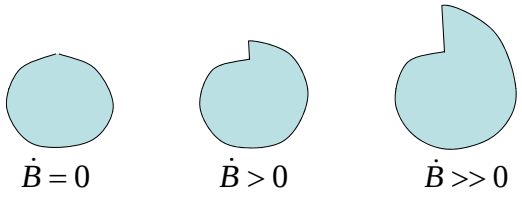


Abbildung 2.23: adiabatische Näherung bei der Integration der Larmorbahn.

$$\pm q\dot{B}\pi r_L^2 = \pm q\dot{B}\pi \frac{v_\perp^2}{\omega_c}\frac{m}{\pm qB} = \frac{1}{B}\frac{1}{2}mv_\perp^2 \underbrace{\frac{2\pi\dot{B}}{\omega_c}}_{\delta B} = \mu\delta B \tag{2.80}$$

δB entspricht der Änderung in B pro Umlauf. Die Änderung in der potentiellen Energie eines magnetischen Momentes im Magnetfeld μB entspricht einer Änderung in der kinetischen Energie senkrecht zum Magnetfeld $\frac{1}{2}mv_\perp^2$:

$$\delta\left(\mu B\right) = \delta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right) \tag{2.81}$$

die linke Seite kann erweitert werden zu

$$B\delta\mu + \mu\delta B = \delta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right) \tag{2.82}$$

Der Vergleich der Gleichungen 2.79 und 2.82 ergibt demnach, daß

$$\boxed{\delta\mu = 0} \tag{2.83}$$

gelten muß. Dies gilt auch für ein *langsam veränderliches* B-Feld. Die Invarianz des magnetischen Moments kann man zum Heizen eines Plasmas ausnutzen. Legt man an eines Spule eine Wechselfeld an, so erhält man eine periodische Variation des Magnetfeldes. Damit oszilliert auch $v_\perp$. Der Netto-Energiegewinn wäre allerdings Null, da sich die Gyrationsbewegung immer wieder umdreht. Falls aber Stöße stattfinden, kann sich die Erhöhung in

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$v_\perp$ auch in $v_\parallel$ übertragen. Bewegt sich das Teilchen dann parallel zum Magnetfeld spürt es die Lorentzkraft nicht mehr und kann deshalb nicht mehr abgebremst werden. Damit erhöht sich im Mittel die Energie der Teilchen, da Energie in die parallel-Komponente hinein fliessen kann, sie aber durch das oszillierende Magnetfeld allein nicht mehr herausgenommen wird. Die Energieerhöhung in einem Plasma durch oszillierende Magnetfelder bezeichnet man als **magnetisches Pumpen**.

Zweite adiabatische Invariante

Die zweite adiabatische Invariante bezieht sich auf die Pendelbewegung zwischen den Umkehrpunkten in einer magnetischen Spiegelanordnung, wie in Abb. 2.24 verdeutlicht.

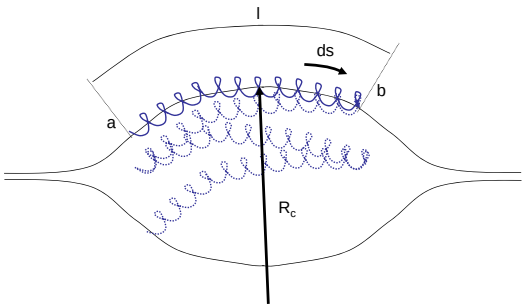


Abbildung 2.24: 2-te adiabatische Invariante als Pendelbewegung zwischen zwei Umkehrpunkten. Die dritte adiabatische Variante entspricht einer langsamen Drift dieser Pendelbewegung um den Umfang der Spiegelmaschine.

Die Erhaltungsgröße sei gegeben durch folgendes Pfadintegral

$$J = \oint m v_\parallel ds \tag{2.84}$$

Nehmen wir die Länge des Weges zwischen den Umkehrpunkten zu l, so ist die Erhaltungsgröße gegeben durch

$$J = 2m\langle v_\parallel \rangle l \tag{2.85}$$

Daran schließt sich die Frage, wie sich die Geschwindigkeit $v_\parallel$ auf dem Pfad ändert. Zunächst gehen wir von der Energieerhaltung aus:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 = \text{const.} \tag{2.86}$$

die Zeitableitung liefert

$$mv_{\parallel}\frac{\partial v_{\parallel}}{\partial t} + \frac{d}{dt}(\mu B) = 0 \tag{2.87}$$

$$m\frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial v_{\parallel}}{\partial t} = -\frac{d}{dt}(\mu B) \tag{2.88}$$

Vertauschen der Ableitungen liefert

$$m\frac{\partial v_{\parallel}}{\partial t} = -\frac{d}{ds}(\mu B) = -\frac{d}{ds}V \tag{2.89}$$

mit V der potentiellen Energie. Die Energiebilanz ergibt:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + V(s) = \mu B_m \equiv W \tag{2.90}$$

mit W der Gesamtenergie und B_m dem Magnetfeld am Umkehrpunkt. Die Erhaltungsgröße ergibt:

$$J = \oint m\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v_{\parallel}}ds = \oint[2m(W-V)]^{1/2}ds = \oint[2m(\mu B_m - \mu B)]^{1/2}ds \tag{2.91}$$

Nachdem μ eine Erhaltungsgröße der Bewegung gemäß der ersten adiabatischen Invariante ist, müssen wir fordern, dass der Ausdruck:

$$\oint[B_m - B]^{1/2}ds \tag{2.92}$$

invariant bleibt. Dies gilt falls das B-Feld sich zeitlich *langsamer* ändert als die Pendelbewegung des geladenen Teilchens zwischen den Umkehrpunkten. Mit

$$v_{\parallel} = \left[\frac{2}{m}(\mu B_m - \mu B)\right]^{1/2} \tag{2.93}$$

muß die zweite adiabatische Invariante gelten

$$\boxed{\oint v_{\parallel}ds = \text{invariant}} \tag{2.94}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Betrachtet man allerdings die Wechselwirkung von geladenen Teilchen mit zeitlich veränderlichen magnetischen Feldern so kann sich die Geschwindigkeit ändern. Klassisches Beispiel ist die sog. **Fermi-Beschleunigung** . Zeitlich veränderliche Magnetfelder sind immer mit einem elektrostatischen Feld verknüpft ($\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$) in dem Ladungsträger beschleunigt werden können. Dies ist ein wesentlicher Mechanismus zur Beschreibung hochenergetischer Höhenstrahlung. Hierbei werden Teilchen des Sonnenwindes beim Durchtreten an der Schockfront ($\dot{B} \gg$) des Erdmagnetfeldes in der Heliosphäre beschleunigt (siehe Abb. 2.25)

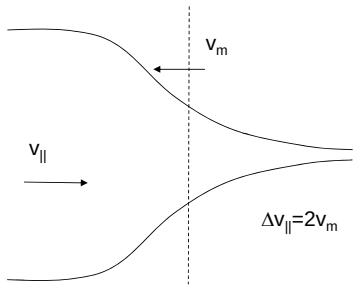


Abbildung 2.25: Fermi Beschleunigung

Als weitere Möglichkeit zur Ableitung der Fermi-Beschleunigung kann man die zweite adiabatische Invariante zunächst als

$$J = \oint v_{\parallel} ds = \langle v_{\parallel} \rangle 2l \tag{2.95}$$

schreiben mit l dem Abstand zwischen den beiden Umkehrpunkten. Erhöht man jetzt das Magnetfeld in einer Spiegelmaschine, rücken die Umkehrpunkte näher zusammen, d.h. der Abstand l verringert sich. Da die zweite adiabatische Invariante gilt, muß sich im selben Maße die Parallel-Geschwindigkeit $\langle v_{\parallel} \rangle$ erhöhen. Auch dies ist die Fermi-Beschleunigung.

Dritte adiabatische Invariante

Schließlich gibt es noch eine dritte Pendelbewegung in einer Spiegelanordnung. Hierbei rotiert die gesamte Teilchenbahn um die Achse (siehe Abb. 2.24), da die Krümmungsdrift der Pendelbewegung überlagert ist. Erhaltungsgröße ist hierbei der magnetische Fluss:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\boxed{\Phi = \int \vec{B} d\vec{S}} \tag{2.96}$$

Zusammenfassend läßt sich sagen, dass, je nach Stoßfrequenz, die drei adiabatischen Invarianten unterschiedlich gute Erhaltungsgrößen sind. Die schnellste Bewegung ist die Gyration, demnach ist das magnetische Moment in der Regel eine Erhaltungsgröße. Die zweite adiabatische Invariante, die Pendelbewegung zwischen den Umkehrpunkten, ist in der Regel bei niedrigerem Druck erfüllt, da die Periode länger ist und die Wahrscheinlichkeit eines Stoßes mit einem Neutralteilchen zu erleiden größer ist. Die dritte adiabatische Invariante ist nur selten erfüllt, da die Rotation der Pendelbewegung um die Achse der Spiegelanordnung die längste Periode besitzt. Zusammenfassend läßt sich die Gültigkeit der einzelnen adiabatischen Varianten in folgender Rangfolge sehen

$$\mu > \int v_{\parallel} > \int \vec{B} d\vec{S} \tag{2.97}$$

Ein Beispiel für die Realisierung einer magnetischen Flasche auf großer Skala ist in Abb. 2.26 gezeigt. Teilchen, die in den Verlustkegel fallen werden am Ende durch spezielle Spulen geführt und durch elektrische Felder reflektiert.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

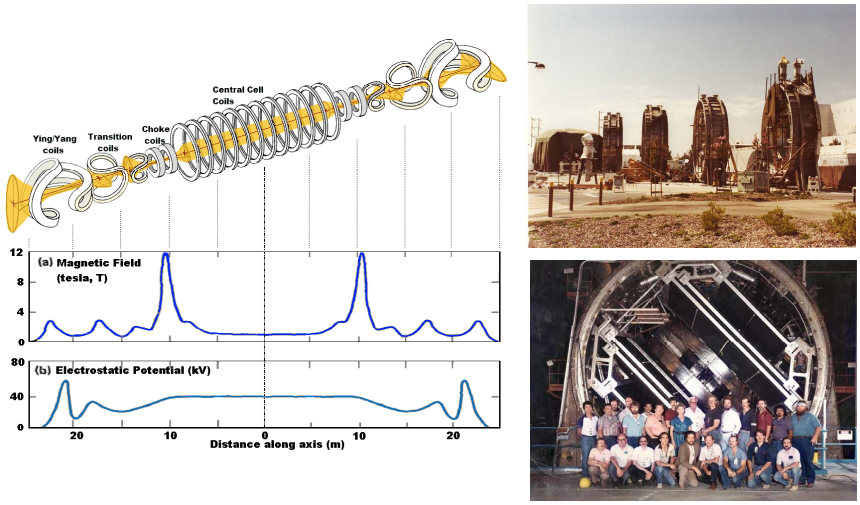


Abbildung 2.26: Spiegelmaschine, wie sie für die Kernfusionsforschung eingesetzt wurde. Am Ende der Spiegelmaschine werden spezielle Ying-Yang-Spulen und elektrische Fleder montiert, um die Teilchen, die in den Verlustkegel gefallen sind, wieder in die magnetische Flasche zurückzuspiegeln.

2.2 Vielteilchenbild

Im Einzelteilchenbild können sehr erfolgreich die Driften geladener Teilchen in gegebener Feldkonfiguration beschrieben werden. Jegliche Vielteilcheneffekte bleiben unbetrachtet. Vorgänge wie das Ausbilden eines Druckes im Plasma und der Einfluss von Stößen auf den Transport können nur in einem Vielteilchenbild beschrieben werden.
Ein subtiler Unterschied ist die Tatsache, dass das Einzelteilchenbild von der Lorentz-Kraft ausgeht und hierbei immer eine Gleichung für eine Trajektorie gelöst wird. D.h. die Betrachtung folgt immer dem Teilchen und ist *nicht ortsfest*. Eine sehr viel praktikablere Beschreibung, wäre aber ein ortsfestes Koordinatensystem mit einzelnen Volumenelementen in die die Teilchen ein- und austreten können. Genau dies ist die "Euler'sche Beschreibung".

2.2.1 Hierarchie der Gleichungen der Plasmaphysik

In der Plasmaphysik kann man eine Hierarchie von Gleichungen aufstellen. Dies beginnt mit einer Funktion f die N Teilchen komplett beschreibt im Phasenraum für Ort und Geschwindigkeit.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$f(\vec{x}_i, \vec{v}_i) \qquad i = 1..N \tag{2.98}$$

Dieses Problem hat 6N Dimensionen und ist einfach die Überlagerung der Lösung der Bewegungsgleichung von N Teilchen. Diese hohe Dimensionalität kann man stark reduzieren indem man eine neue Funktion f definiert, die nur die Wahrscheinlichkeit wiedergibt in einem Intervall im Orts- und Geschwindigkeitsraum ein Teilchen vorzufinden. Diese **Verteilungsfunktion** im Phasenraum hat nur noch 6 Dimensionen:

$$f(\vec{x}, \vec{v}) \tag{2.99}$$

Alternativ zur Formulierung als Wahrscheinlichkeit ein Teilchen zu finden, kann man auch die Zahl der Teilchen in dem Phasenraumelement $d\vec{x}d\vec{v}$ nehmen. Beide Formulierungen, bzw. Normierungsvorschriften für f sind gleichwertig. Das Problem läßt sich noch weiter reduzieren indem man die Information über die Geschwindigkeit marginalisiert via

$$\int f(\vec{x}, \vec{v}) d^3v = n(\vec{x}) \tag{2.100}$$

und nur noch an der ortsaufgelösten Dichte $n(\vec{x})$ des Plasmas interessiert ist. Diese Beschreibung hat schließlich nur noch 3 Dimensionen. Letzteres entspricht dem Fluidbild, wobei zunächst jede Teilchensorte jeweils einer Flüssigkeit entspricht. Eine weitere Vereinfachung gibt es nur noch bei vollionisierten Plasmen bei dem die Symmetrie der Gleichungen ausgenutzt wird und 2-Flüssigkeits-Gleichungen (Elektronen und Ionen) auf Einflüssigkeits-Gleichungen reduziert werden (MHD).
Neben den Fluid-Gleichungen gelten natürlich noch die **Maxwell-Gleichungen** (ρ...Ladungsdichte):

$$\begin{aligned}
\mathbf{div}\vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho & (2.101)\\
\mathbf{div}\vec{B} &= 0 & (2.102)\\
\mathbf{rot}\vec{E} &= -\dot{\vec{B}} & (2.103)\\
\mathbf{rot}\vec{B} &= \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\dot{\vec{E}} & (2.104)
\end{aligned}$$

und die **Zustandsgleichung** des Plasmas als idealem Gas:

$$p = nk_BT \tag{2.105}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Für die Zustandsänderung ist entscheidend in welcher Form sie geschieht. Allgemein wird sie beschrieben durch, die **Adiabatengleichung**:

$$\boxed{\frac{\nabla p}{p} = \gamma \frac{\nabla n}{n}} \tag{2.106}$$

mit

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \tag{2.107}$$

Für das ideale Gas gilt

$$\gamma = \frac{2+N}{N} \tag{2.108}$$

Bei adiabatischen Zustandsänderungen gilt γ wie beschrieben. Bei isothermen Zustandsänderungen gilt $\gamma = 1$. Letzteres ist für die Beschreibung der Elektronen der Fall, da der Temperaturausgleich in der Regel schnell erfolgt und demnach von isothermen Verhältnisse ausgegangen werden kann.

2.2.2 Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion in 6N Dimensionen (plus 1 Dimension Zeit) beschreibt das Plasma im Phasenraum Ort und Geschwindigkeit (Abb. 2.27). Prominentes Beispiel ist die Maxwell-Geschwindigkeitsverteilung, die sich einstellt, wenn alle Teilchen durch Stöße ihre Geschwindkeitskomponenten ausgleichen können und sich eine Verteilungsfunktion maximaler Entropie einstellen kann. Dies ist die Maxwell-Verteilung. Die Verteilung im Geschwindigkeitsraum ist:

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{1/2mv^2}{k_B T}} \tag{2.109}$$

In dieser Notation ist die Verteilungsfunktion $f(\vec{v})$ auf eins normiert. Aus dieser Verteilungsfunktion lassen sich unterschiedliche Größen ableiten wie z.B. die Verteilungsfunktion, die der Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Geschwindigkeitsbetrag entspricht.

$$f(|v|) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{1/2mv^2}{k_B T}} \tag{2.110}$$

Gemittelte Größen lassen sich aus der Verteilungsfunktion über Integration ermitteln. Die mittlere Geschwindigkeit einer Maxwell-Verteilung ist:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

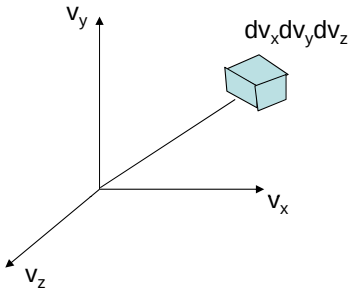


Abbildung 2.27: Die Verteilungsfunktion f beschreibt die Zahl der Teilchen in einem Phasenraumelement $d\vec{x}d\vec{v}$. Im Geschwindigkeitsraum für einen gegebenen Ort $\vec{x}$ haben wir ein Volumenelement $dv_x dv_y dv_z$.

$$|\bar{v}| = \int |v| f(\vec{v}) d^3v = \left(\frac{8k_B T}{\pi m}\right)^{1/2} \tag{2.111}$$

Die mittlere Geschwindigkeit einer Maxwell-Verteilung für eine Richtung x ist:

$$|\bar{v_x}| = \int |v_x| f(\vec{v}) d^3v = \left(\frac{2k_B T}{\pi m}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\bar{v} \tag{2.112}$$

Verwendet man die Normierung der Verteilungsfunktion auf die Dichte der Teilchen $n(\vec{x})$ an einem Ort $\vec{x}$, so bekommt man:

$$f(\vec{v}) = n(\vec{x}) \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{1/2mv^2}{k_B T}} \tag{2.113}$$

Diese Formulierung der Normierungsbedingung wollen wir im folgenden verwenden.

2.2.3 zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion

Für die Beschreibung von Plasmen ist natürlich die zeitliche Entwicklung dieser Verteilungsfunktion unter dem Einfluss von äußeren Feldern entscheidend. Aus diesem Grund betrachten wir jetzt die Änderung dieser Verteilungsfunktion im Phasenraum. Zur Vereinfachung betrachten wir den 2 dimensionalen Fall wie in Abb. 2.28 angedeutet. Eine Teilchenmenge sei zum Zeitpunkt t an einem Ort x, v und bewegt sich zu einem neuen Ort x', v' zu einem Zeitpunkt $t + dt$. Die Gleichungen die dies beschreiben sind:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

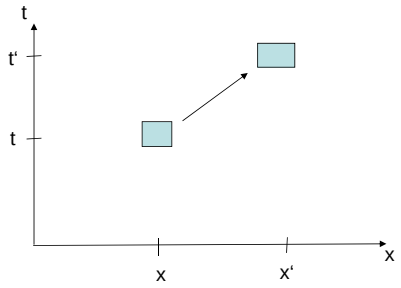


Abbildung 2.28: Zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion

$$x' = x + v_x dt \tag{2.114}$$

$$v'_x = v_x + \dot{v}_x dt = v_x + \frac{F}{m} dt \tag{2.115}$$

falls keine Prozesse neue Teilchen erzeugen gilt:

$$f(x', v'_x, t')dx'dv'_x = f(x, v_x, t)dxdv_x \tag{2.116}$$

Wie transformieren jetzt die Größen x zu x' und v_x zu v'_x. Die obigen Gleichungen kann man als Transformation des Koordinatensystem interpretieren. Hierfür gilt im Zweidimensionalen:

$$dx'dv'_x = |J|dxdv_x = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial v_x} \\ \frac{\partial v'_x}{\partial x} & \frac{\partial v'_x}{\partial v_x} \end{vmatrix} dxdv_x \tag{2.117}$$

die Jacobi-Determinante J ergibt für diese Transformation

$$|J| = 1 + O(dt^2) \tag{2.118}$$

demnach muß in erster Ordnung gelten dass $dxdv_x = dx'dv'_x$. Daraus folgt $f(x', v'_x, t') = f(x, v_x, t)$. D.h. die Verteilungsfunktion bleibt zeitlich konstant

$$\boxed{\frac{df}{dt} = 0} \tag{2.119}$$

Dies bezeichnet man als **Liouville-Theorem**. Dies ist allerdings die totale Ableitung. Aufgelöst nach partiellen Ableitungen ergibt sich:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \tag{2.120}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

daraus erhält man die sogenannte **Vlasov-Gleichung**:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0} \tag{2.121}$$

Unter Berücksichtigung von Stößen kann eine Umverteilung stattfinden, bzw. können neue Teilchen durch Ionisation erzeugt werden. Dies wird in der sog. **Boltzmann-Gleichung** beschrieben.

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{Stoesse}} \tag{2.122}$$

Der Term auf der rechten Seite beinhaltet alle Prozesse, die durch Stoßprozesse eine Änderung der Verteilungsfunktion hervorrufen. In dem Bild der Verteilungsfunktion haben wir jetzt ein ortsfestes-Koordinatensystem gewonnen.
Ohne die Änderung im Geschwindigkeitsraum kann man die sog. **konvektive Ableitung** schreiben als:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\nabla f \tag{2.123}$$

die linke Seite entspricht einem Beobachter, der sich mit dem Phasenraumelement mit bewegt. Der erste Term auf der rechten Seite entspricht einem Beobachter, der von außen ein festgelegtes Volumenelement betrachtet. Die Beschreibung in einem Koordinatensystem, das sich mit einem Fluidelement mit bewegt bezeichnet man als **"Lagrange'sche Beschreibung"** und die Beschreibung mit einem orts-festen Koordinatensystem bezeichnet man als **"Euler'sche Beschreibung"**.
Anschaulich kann man das an dem Beispiel einer Welle in Abb. 2.26 verdeutlichen. Unter der Annahme, dass keine neuen Teilchen erzeugt werden ergibt sich:

$$\frac{df}{dt} = 0 \tag{2.124}$$

D.h. ein Beobachter der mit der Welle mit schwimmt, merkt gar nicht das er auf einer Welle sitzt. Hält man nun den Ort fest, sieht ein Betrachter von außen allerdings, das die Teilchenmenge am Ort x_0 zunimmt. Dies geschieht proportional zu der Geschwindigkeit dieser Welle und deren Dichtegradienten.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{v}\nabla f \tag{2.125}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

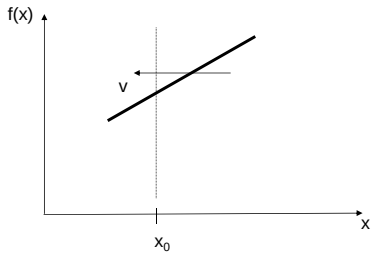


Abbildung 2.29: Idee der konvektiven Ableitung

Nach Abbildung 2.29 ist der Gradient in f positiv, während die Geschwindigkeit $\vec{v}$ in negative x-Richtung zeigt. D.h. nach Gleichung 2.125 wird $\frac{\partial f}{\partial t}$ am Ort x_0 positiv und der stationäre Beobachter sieht eine Zunahme der Teilchendichte am Ort x_0.

2.2.4 Momente der Boltzmann-Gleichung, Fluidbild

Zunächst betrachten wir eine noch weitere Vereinfachung im Vielteilchenbild indem wir die Information der Verteilung im Geschwindigkeitsraum auf wenige Momente reduzieren. Das n-te Moment einer Verteilungsfunktion oder Gleichung ist definiert als:

$$\int v^n f(v) d^3v \tag{2.126}$$

Prinzipiell bleibt die vollständige Information über die Form von $f(v)$ im Geschwindigkeitsraum durch die Angabe von Unendlich vielen Momenten erhalten. Allerdings kann man diese Betrachtung in vielen Fällen nach den führenden Momenten abbrechen. Wir reduzieren die Dimension des Problems auf 3, indem wir im folgenden nur die ersten drei Momente betrachten. Die zeitliche Entwicklung dieser Momente ist durch die Momente der Vlasov-Gleichung selbst gegeben.

0-tes Momente, Teilchenbilanz

Zunächst betrachten wir das 0te Moment gemäß:

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3v + \int \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} d^3v + \int \frac{\vec{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d^3v = 0 \tag{2.127}$$

Dies ist eine *Bilanzgleichung* über die Anzahl der Teilchen, da

 © A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\int f(v)d^3v = n(\vec{x}) \tag{2.128}$$

gilt und $\frac{df}{dt}$ damit einer Änderung der Teilchenzahl entspricht. In Gl. 2.127 können die Integration und die Ableitung nach dem Ort vertauscht werden. Der dritte Term ergibt Null wie gleich bewiesen wird. Zunächst erhalten wir somit:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f d^3v + \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\int \vec{v} f d^3v = 0 \tag{2.129}$$

Dies ergibt die Kontinuitätsgleichung, bzw. die **Teilchenbilanz**:

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{v}_s) = 0} \tag{2.130}$$

nachdem das erste Moment über die Geschwindigkeit, die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\vec{v}_s$ liefert:

$$\int \vec{v} f d^3v = \vec{v}_s \cdot n(\vec{x}) \tag{2.131}$$

Wir hatten behauptet das der dritte Term in Gleichung 2.127 zu Null wird. Dies wird im folgenden gezeigt. Die Kraft auf geladene Teilchen ist wieder die Lorentz-Kraft, d.h ein Term proportional zu $\vec{E}$ und zu $\vec{v} \times \vec{B}$.

$$\int \vec{E}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d^3v = \int \frac{\partial}{\partial \vec{v}}\vec{E} f d^3v = \int_S \vec{E} f d\vec{S} = 0 \tag{2.132}$$

Hierbei wurde der Gauß'sche Satz genutzt, der die Divergenz eines Feldes mit dem Oberflächenintegral verknüpft. Dies muss zu Null werden, da bei einer Oberfläche im Unendlichen die Verteilungsfunktion f zu Null werden muß, um einen endlichen Energieinhalt zu beschreiben. Das hat zur Folge, daß das ganze Integral zu Null wird. Ebenso läuft die Argumentation für den zweiten Term:

$$\int \vec{v} \times \vec{B}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d^3v = \int \frac{\partial}{\partial \vec{v}}(f\vec{v} \times \vec{B}) d^3v - \int f\frac{\partial}{\partial \vec{v}}(\vec{v} \times \vec{B}) d^3v \tag{2.133}$$

Der erste Term ist wieder Null, da er über den Gauß'schen Satz wieder mit einem Oberflächenintegral verknüpft werden kann. Der zweite Term ist auch Null, da die Änderung der Geschwindigkeit und die Geschwindigkeit selbst senkrecht zueinander stehen ($\vec{v} \times \vec{B}$ wirkt immer senkrecht zur Geschwindigkeit). Demnach wird auch dieser Term Null.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

1-tes Moment, Impulsbilanz

Das erste Moment der Verteilungsfunktion ist gegeben als

$$\int v f(v) d^3v = n(\vec{x}) v_s \tag{2.134}$$

mit v_s der Schwerpunktsgeschwindigkeit. Multipliziert man dies mit der Masse m des betrachteten Teilchens wird aus dem erste Moment der Vlasov-Gleichung eine Bilanzgleichung für den Gesamtimpuls in dem Fluid:

$$\int m\vec{v}\frac{\partial f}{\partial t} d^3v + \int m\vec{v}\left(\vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\right) d^3v + \int m\vec{v}\left(\frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\right) d^3v \tag{2.135}$$

Der erste Term in Gl. 2.135 liefert:

$$m\frac{\partial}{\partial t}\left(n\vec{v}_s\right) \tag{2.136}$$

Um den dritten Term aufzulösen benutzen wir zunächst die Produktregel für Ableitungen[1]:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} f\vec{v}\vec{F} = f\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\vec{F} + \vec{F}\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\vec{f} + \vec{F}f\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\vec{v} \tag{2.137}$$

Der dritte Term in Gl. 2.135 liefert:

$$\int \frac{\partial}{\partial \vec{v}} f\vec{v}\vec{F} d^3v - \int f\vec{v}\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{v}} d^3v - \int f\vec{F}\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{v}}}_{=1} d^3v = -n\vec{F} \tag{2.138}$$

Der erste Term in Gl. 2.138 liefert Null gemäß der Argumentation über den Gauß'schen Satz. Der zweite Term in Gl. 2.138 liefert Null, da $\vec{v}$ immer senkrecht auf $\frac{\partial}{\partial v}$ steht, wegen $\vec{F} = \vec{v} \times \vec{B}$. Der zweite Term in Gl. 2.135 liefert:

$$m\int v^2 \frac{\partial}{\partial \vec{x}} f d^3v = m\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\int v^2 f d^3v \tag{2.139}$$

Für die weitere Betrachtung wird die Geschwindigkeitskomponente in einen Schwerpunktanteil und einen thermischen Anteil aufgeteilt, wie in Abb. 2.30 illustriert:

$$v = v_s + v_t \tag{2.140}$$

[1]Dies wird hier nur sehr verkürzt dargestellt. Für die explizite Ableitung muss man die Komponenten der Vektoren gemäß den einzelnen Richtungen x,y und z genau unterscheiden.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

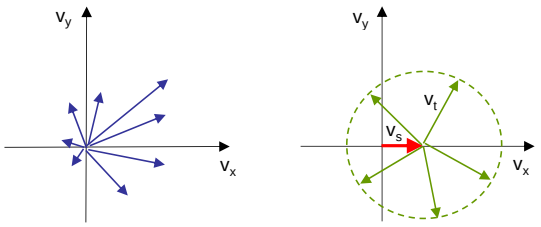


Abbildung 2.30: Die Verteilung im Geschwindigkeitsraum wird aufgeteilt in einen Anteil für den Schwerpunkt und einen thermischen Anteil für die isotrope Geschwindigkeit.

Diese unterscheiden sich durch die Ergebnisse bei deren Mittelung:

$$\int v f dv = n v_s \tag{2.141}$$

demnach ist

$$\int v_t f dv = 0 \tag{2.142}$$

Mit dieser Definition wird

$$\int v^2 f d\vec{v} = n\langle v^2\rangle = n\langle v_s^2 + 2v_s v_t + v_t^2\rangle = n\langle v_s^2\rangle + n\langle v_t^2\rangle \tag{2.143}$$

Damit wird aus

$$m\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\int n f v^2 d\vec{v} = m\frac{\partial}{\partial \vec{x}} n v_s^2 + m\frac{\partial}{\partial \vec{x}} n v_t^2 \tag{2.144}$$

An dieser Stelle wird der Druck eingeführt als makroskopische Größe zur Beschreibung des Vielteilchencharakters des Plasmas. In seiner mikroskopischen Definition ist der Druck gegeben als:

$$p = \frac{1}{3} mn\langle v_t^2\rangle = mn\langle v_{tx}^2\rangle \tag{2.145}$$

mit $\langle v_t^2\rangle = \langle v_{tx}^2\rangle + \langle v_{ty}^2\rangle + \langle v_{tz}^2\rangle$, bzw. bei isotropen Verhältnissen $\langle v_t^2\rangle = 3\langle v_{tx}^2\rangle$. Ganz generell ist der Druck p ein Tensor nachdem er gemäß der Definition der Mittelung nicht nur Terme der Form $\langle v_{tx} v_{tx}\rangle$ sondern auch gemischte Terme wie $\langle v_{tx} v_{ty}\rangle$ enthalten kann. Dies entspricht dem einfachen isotropen Druck bzw. Scherspannungen. Im folgenden wollen wir doch nur den einfachen isotropen Fall betrachten. Die Verknüpfung von Druck und thermischer

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Geschwindigkeit sich anschaulich verstehen: der Druck in der Thermodynamik ist beim idealen Gas gegeben durch $p = nk_BT$, d.h. er verbirgt sich in der isotropen Bewegung der Gasteilchen, und ist damit verknüpft mit v_t. Trifft ein solches Teilchen auf eine Wand überträgt es dort seinen Impuls. Der Übertrag des Impulses von n Teilchen auf eine Wand pro Zeitintervall entspricht einer Kraft F auf diese Oberfläche. In dieser Interpretation ist der Druck

$$p = \underbrace{mv_{tx}}_{Impuls} \underbrace{nv_{tx}}_{Teilchen/Zeit} \tag{2.146}$$

das Produkt aus Teilchenimpuls mv_t und der Auftreffrate von n Teilchen nv_t. Damit erhält man schließlich:

$$m\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\int nfv^2d^3v = m\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\left(nv_s^2\right) + \frac{\partial}{\partial\vec{x}}p \tag{2.147}$$

Der erste Term löst sich auf zu:

$$\frac{\partial}{\partial\vec{x}}nv_s^2 = v_s\frac{\partial}{\partial\vec{x}}nv_s + nv_s\frac{\partial}{\partial\vec{x}}v_s \tag{2.148}$$

Nach dem Einsetzen bekommen wir schließlich:

$$\underbrace{m\frac{\partial}{\partial t}nv_s}_{mn\frac{\partial v_s}{\partial t}+mv_s\frac{\partial n}{\partial t}} + mv_s\underbrace{\frac{\partial}{\partial\vec{x}}nv_s}_{-\frac{\partial n}{\partial t}} + mnv_s\frac{\partial}{\partial\vec{x}}v_s + \frac{\partial}{\partial\vec{x}}p - n\vec{F} = 0 \tag{2.149}$$

der erste Term wird nach der Produktregel differenziert und der Term $\frac{\partial}{\partial\vec{x}}nv_s$ entspricht $-\frac{\partial n}{\partial t}$ aus der Teilchenbilanz. Damit fallen zwei Terme weg und man erhält als Endergebnis die **Impulsbilanz**:

$$\boxed{mn\left[\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial t} + \vec{v}_s\nabla\vec{v}_s\right] = n\vec{F} - \nabla p = nq(\vec{E} + \vec{v}_s\times\vec{B}) - \nabla p} \tag{2.150}$$

In einer mehr allgemeinen Formulierung ist der Druck ein Tensor, der auch Scherkräfte enthalten kann, die durch die Nebendiagonalelemente in $\langle v_tv_t\rangle$ entstehen können (Terme ∇v_xv_y etc).
Aus dieser Impulsbilanz läßt sich auch die Navier-Stokes-Gleichung für Flüssigkeiten mit Reibung ableiten. Bei einer Flüssigkeit mit einer bestimmten Viskosität γ entstehen Scherkräfte, wenn benachbarte Flüssigkeitselemente sich mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aneinander vorbei bewegen. Diese Scherkraft ist $\propto n\gamma\nabla^2v_s$. Hier ist nicht die erste Ableitung sondern die zweite Ableitung der Geschwindigkeit vom Ort maßgeblich,

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

da bei einer linearen Abhängigkeit sich die verzögernde und beschleunigende Scherkraft an den beiden Seiten des Fluidelements aufheben würden. Mit dieser Betrachtung bekommt man die Navier-Stokes Gleichung zu:

$$mn\left[\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + \vec{v}_s \nabla \vec{v}_s\right] = n\vec{F} - \nabla p + n\gamma \nabla^2 \vec{v}_s \tag{2.151}$$

2-tes Momente, Energiebilanz

Das zweite Moment der Vlasov-Gleichung entspricht der Energiebilanz im stoßfreien Fall. Dazu wird das 2te Moment der Vlasov-Gleichung mit $\frac{1}{2}m$ multipliziert und über den Geschwindigkeitsraum integriert. Man erhält

$$\int \frac{1}{2}mv^2 \frac{\partial f}{\partial t} d^3v + \int \frac{1}{2}mv^2 \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} d\vec{v} + \int \frac{1}{2}mv^2 \frac{\vec{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d^3v = 0 \tag{2.152}$$

auch hier können wieder Ableitung und Integration bei den Komponenten Ort und Zeit vertauscht werden. Aus dem ersten Term erhält man die Änderung der Gesamtenergie mit der Zeit:

$$\int \frac{1}{2}mv^2 \frac{\partial f}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2}mv^2 f d^3v = \frac{\partial}{\partial t} n\langle \epsilon \rangle \tag{2.153}$$

Aus dem letzten Term die Änderung der Energie durch eine äußere Kraft gemäß:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2}mv^2 \frac{\vec{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d\vec{v} &= \int \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \frac{1}{2}mv^2 \frac{\vec{F}}{m} f d^3v - \int \frac{1}{2}m2v \frac{F}{m} f d^3v \\ &= -n\vec{F}\vec{v}_s \end{aligned} \tag{2.154}$$

Dieser Term entsteht analog zu oben, da jetzt $\frac{1}{2}\nabla_v v^2 = v$. Aus dem zweiten Term in Gl. 2.152 entstehen Terme gemäß:

$$\langle v^3 \rangle = \langle v^2 \rangle v_s + \langle v^2 v_t \rangle = \langle v^2 \rangle v_s + \langle v_s^2 v_t \rangle + \langle 2 v_s v_t^2 \rangle + \langle v_t^3 \rangle \tag{2.155}$$

Aus dem ersten Term entsteht ein Ausdruck gemäß dem Energietransport der mittleren Energie $\epsilon = \frac{1}{2}mv^2$ durch Konvektion

$$\nabla n\langle \epsilon \rangle v_s \tag{2.156}$$

der zweite Term in Gl. 2.155 ist 0 und aus dem dritten Term entsteht ein Ausdruck gemäß Energiegewinn bzw. Abfuhr durch Kompression bzw. Expansion:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$p\nabla v_s \tag{2.157}$$

der letzte Term in Gl. 2.155 schließlich entspricht dem Energietransport durch Wärmeleitung:

$$\nabla q \qquad \text{mit} \qquad q = -\kappa\nabla T \tag{2.158}$$

mit κ der Wärmeleitfähigkeit. Setzt man dies alles ein so erhält man schließlich die **Energiebilanz**:

$$\frac{\partial}{\partial t}n\langle\epsilon\rangle + \underbrace{\nabla n\langle\epsilon\rangle v_s}_{Konvektion} + \underbrace{p\nabla v_s}_{Kompression/Expansion} + \underbrace{\nabla q}_{Waermeleitung} - \underbrace{nv_s\vec{F}}_{z.B.\ ohmsche\ Heizung} = 0 \tag{2.159}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich einfache Fälle konstruieren. So entspricht die Energieänderung durch Expansion oder Kompression einem Term:

$$\frac{\partial}{\partial t}n\langle\epsilon\rangle = -p\nabla v_s \tag{2.160}$$

bzw. ein Energiegewinn durch ohmsche Heizung in einem äußeren elektrischen Feld:

$$\frac{\partial}{\partial t}n\langle\epsilon\rangle = nv_s\vec{F} = \vec{j}\vec{E} \tag{2.161}$$

Bei dem Vergleich mittlerer Energie, Druck und Schwerpunktsgeschwindigkeit gibt es in der Literatur unterschiedliche Vereinfachungen. In Niederdruckplasmen ist oftmals die thermische Energie sehr viel höher als die Energie in der Schwerpunktsgeschwindigkeit. Demnach kann man

$$\langle\epsilon\rangle = \frac{3}{2}k_BT = \frac{3}{2}\frac{p}{n} \tag{2.162}$$

setzen.

2.2.5 Driften im Fluidbild

Drift parallel zum B-Feld

Nach der Einführung des Fluidbildes sind wir jetzt in der Lage die Debyelänge abzuleiten. Die Impulsbilanz der Elektronen ist gegeben durch:

$$mn\left[\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s\nabla v_s\right] = n\vec{F} - \nabla p = nq\vec{E} - \nabla p \tag{2.163}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

im Gleichgewicht gilt unter der Annahme einer ruhenden Flüssigkeit

$$nq\vec{E} = \nabla p \tag{2.164}$$

mit $q = -e$ und $\vec{E} = -\nabla\Phi$ erhält man hier unter Annahme einer isothermen Zustandsänderung für die Elektronen:

$$en\nabla\Phi = \nabla p = \nabla n k_B T \tag{2.165}$$

oder

$$e\nabla\Phi = \frac{1}{n}\nabla n k_B T = \nabla \ln n k_B T \tag{2.166}$$

Integriert man diese Gleichung so bekommt man

$$e\Phi = k_B T_e \ln n + c \tag{2.167}$$

mit der Integrationskonstanten c, die durch die Normierung der Plasmadichte n_0 entspricht. Man bekommt als Lösung für n somit:

$$\boxed{n = n_0 e^{\frac{e\Phi}{k_B T_e}}} \tag{2.168}$$

Dies bezeichnet man als **Boltzmann-Beziehung**. Sie entspricht dem Gleichgewicht zwischen der thermischen Energie der Elektronen und dem elektrischen Potential das entsteht wenn man die Elektronen relativ zu den Ionen verschiebt. Bei hoch dichten Plasmen kommt das Pauli-Verbot hinzu, die die Dichte der Elektronen an einem Ort limitiert.
Die Abschirmung einer Störung der Quasineutralität wird wieder aus der Poisson-Gleichung abgeleitet:

$$\epsilon_0\nabla^2\Phi = -e(n_i - n_e) \tag{2.169}$$

$$\epsilon_0\nabla^2\Phi = -e\left(n_0 - n_0 e^{\frac{e\Phi}{k_B T_e}}\right) \tag{2.170}$$

Für den Fall, dass die thermische Energie sehr viel größer ist als die Potentialstörung kann die Exponentialfunktion entwickelt werden gemäß:

$$\epsilon_0\nabla^2\Phi = en_0\left[e^{\frac{e\Phi}{k_B T_e}} - 1\right] = en_0\left[1 + \frac{e\Phi}{k_B T_e} + ... - 1\right] = en_0\frac{e\Phi}{k_B T_e} \tag{2.171}$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$\Phi = \Phi_0 e^{-\frac{|x|}{\lambda_D}} \tag{2.172}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

mit der **Debyelänge**:

$$\boxed{\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{ne^2}\right)^{1/2}} \tag{2.173}$$

Drift senkrecht zum B-Feld, diamagnetische Drift, Plasma β

Durch die Einführung des Fluidbildes haben wir jetzt einen zusätzlichen Term ∇p in der Impulsbilanz, der Druckgradient. Für Teilchendriften senkrecht zum Magnetfeld ergibt sich folgendes Bild. Zunächst gilt wieder:

$$mn\left[\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \nabla v_s\right] = n\vec{F} - \nabla p = nq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \nabla p \tag{2.174}$$

Wir vernachlässigen zunächst die explizite Zeitableitung, da wir nur an der Driftbewegung interessiert sind. Der zweite Term auf der linken Seite wird auch vernachlässigt da die Driftbewegung senkrecht auf dem Geschwindigkeitsgradienten steht, wie noch gezeigt wird. Als Ausgangsgleichung haben wir demnach

$$0 = nq\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) - \nabla p \tag{2.175}$$

Wir multiplizieren von rechts mit $\times\vec{B}$ und erhalten

$$0 = nq\left(\vec{E} \times \vec{B} + \vec{v} \times \vec{B} \times \vec{B}\right) - \nabla p \times \vec{B} \tag{2.176}$$

$$0 = nq\left(\vec{E} \times \vec{B} + \vec{B}(\vec{v}_\perp \vec{B}) - \vec{v}_\perp B^2\right) - \nabla p \times \vec{B} \tag{2.177}$$

der zweite Term fällt weg, da $v_\perp$ immer senkrecht zu $\vec{B}$ steht. Man erhält schließlich als Driftgeschwindigkeit

$$v_\perp = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} - \frac{\nabla p \times \vec{B}}{qnB^2} \tag{2.178}$$

Der erste Term ist die bekannte E × B Drift und der zweite Term ist die **diamagnetische Drift**. Sie führt dazu, daß bei gegebenem Druckgradient, die Elektronen und die Ionen in unterschiedliche Richtung senkrecht zum Magnetfeld getrieben werden. Damit entsteht ein diamagnetischer Strom, der das äußere Magnetfeld abschirmt. Eine zylindrische Plasmasäule in einem äußeren Magnetfeld beginnt als ganzes zu rotieren.
Diese Driftgeschwindigkeit ändert sich mit dem Abstand zum Zentrum der Plasmasäule, d.h. $\nabla\vec{v}$ steht senkrecht auf $\vec{v}$ selbst. Dies rechtfertigt die eingangs gemachte Annahme, daß der Term $\vec{v}\nabla\vec{v}$ Null ist.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

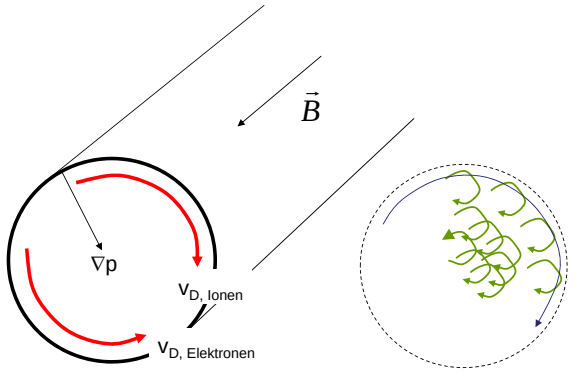


Abbildung 2.31: Durch einen Gradienten im Plasmadruck entsteht eine diamagnetische Drift, die einem abschirmenden Strom in einer Plasmasäule entspricht.

Wir betrachten jetzt noch einmal die Konfiguration einer Plasmasäule. Es muß gelten:

$$\nabla p = qn(\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{j} \times \vec{B} \tag{2.179}$$

Zudem gilt das Ampere'sche Gesetz

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{2.180}$$

Gleichung 2.179 mit $\times \vec{B}$ multipliziert liefert jetzt direkt den diamagnetischen Strom:

$$\vec{j}_\perp = \frac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2} \tag{2.181}$$

Gleichung 2.180 in 2.179 eingesetzt ergibt:

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{B}\nabla\vec{B} - \frac{1}{2}\nabla B^2\right] \tag{2.182}$$

daraus folgt

$$\nabla\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\nabla\vec{B} \simeq 0 \tag{2.183}$$

Da der Gradient entlang des Magnetfeldes in der Regel sehr klein ist, kann die rechte Seite nahezu Null gesetzt werden. Demnach muss gelten:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{const.} \tag{2.184}$$

der erste Term ist der Plasmadruck und der zweite Term entspricht dem Magnetfelddruck. Die Summe aus beiden bleibt konstant über den Querschnitt einer Plasmasäule. Dies wird auch ausgedrückt durch das sogenannte **Plasma** β:

$$\boxed{\beta = \frac{p(0)}{\frac{B(R)^2}{2\mu_0}}} \tag{2.185}$$

per Definition wird der Druck im Zentrum der Plasmasäule genommen und das Magnetfeld am Rand des Plasmas. Ein hohes Beta bedeutet demnach, dass das Magnetfeld im inneren sehr klein wird, während bei einem kleinen β-Wert das Magnetfeld die Plasmasäule gut durchdringen kann.
Die Ströme in einem zylindrischen Plasma lassen sich durch unterschiedliche Anordnungen messen. Im einfachsten Fall wird zunächst das Magnetfeld durch Halldetektoren bestimmt. Aus dem Magnetfeld lassen sich dann die erzeugenden Ströme berechnen. Alternativ dazu kann man allerdings auch die induzierten Spannungen in einer Spule vermessen, wenn der Strom in dem Plasma wie zum Beispiel beim Einschalten variiert wird ($\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$). Dadurch entsteht ein zeitlich veränderliches Magnetfeld. Je nach Anordnung der Spule lassen sich unterschiedliche Beiträge zu dem Plasmastrom messen2.32:

- **diamagnetische Spule**

  Bei einer diamagnetischen Spule wird einfach eine Schlaufe um das Plasma gelegt. Beim Einschalten des Plasmas entsteht ein Druckgradient von innen nach außen, der einen diamagnetischen Strom antreibt. Dieser erzeugt einen zeitlich veränderlichen magnetischen Fluß durch die Querschnittsfläche der Spule und damit eine Spannung an den Enden. Die Änderung des Plasmastrom entlang der Zylinderachse erzeugt keine Änderung des magnetischen Flußes in dieser Spule. Demnach wird hier *nur* der diamagnetische Anteil am Plasmastrom gemessen.

- **Polodialfeldspule**

  In einer Polodialfeldspule wird vorwiegend der Anteil am Plasmastrom gemessen, der entlang der Zylinderachse fließt. Nur dieser erzeugt ein zeitlich veränderliches Magnetfeld um den Umfang der Plasmasäule (vgl. stromdurchflossener Leiter). Allerdings enthält das Signal noch Anteile des diamagnetischen Stromes, da die Stromdichteverteilung in

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

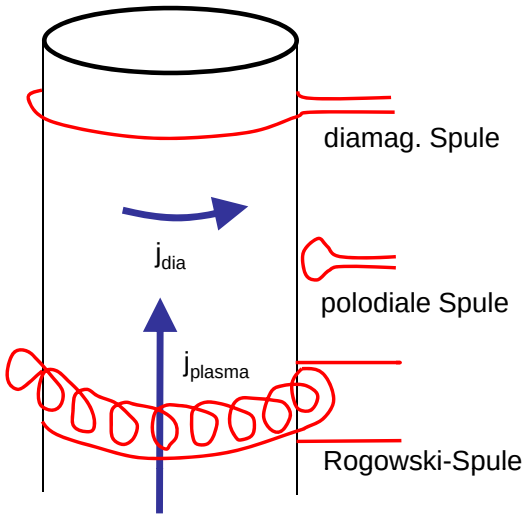


Abbildung 2.32: Messung von Plasmaströmen mittels Spulen.

der ganzen Säule teilweise zum veränderlichen Fluß in der Polodialfeldspule beiträgt.

- **Rogowskispule**

  Mit einer Rogowskispule läßt sich schließlich ausschließlich der Anteil am Plasmastrom messen, der entlang der Zylinderachse fließt. Bei diese Anordnung werden Polodialfeldspulen in Serie um den Umfang angebracht und messen somit den Plasmastrom. Die Zuleitung wird allerdings wieder einmal um den Umfang zurückgeführt, so daß sich keine geschlossene Leiterschleife um den Umfang ergibt.

2.2.6 Vergleich Fluidbild - Einzelteilchenbild

Bei einem Vergleich zwischen Einzelteilchen- und Fluidbild stellt man fest, dass einige Driften in jeweils nur einer Beschreibung vorkommen. Um beide Bilder zusammenführen zu können betrachtet man ein infinitesimals Fluidelement und betrachtet die Teilchentrajektorien, die durch diese Fluidelement führen. Eine Mittelung über die Teilchengeschwindigkeiten dieser einzelnen Teilchen entspricht dann einer Schwerpunktsgeschwindigkeit der Flüssigkeit:

- **diamagnetische Drift**

  Die diamagnetische Drift kann nicht im Einzelteilchenbild existieren, da nicht das Zusammenspiel von vielen Teilchen betrachtet wird. Im Fluid-

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

bild gibt es eine Driftbewegung, da Teilchen einen bestimmten Punkt in einer Richtung häufiger passieren als in die andere. Voraussetzung ist ein Dichtegradient im Plasma, wie in Abb. 2.33 verdeutlicht.

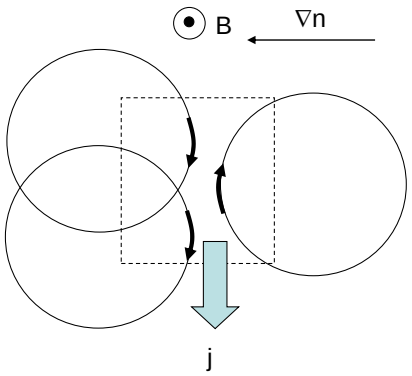


Abbildung 2.33: Vergleich Einzelteilchen-Fluidbild: diamagnetische Drift

- **∇B Drift**

  Die ∇B-Drift existiert im Einzelteilchenbild, aber nicht im Fluidbild. Teilchen treten durch ein bestimmtes Volumenelement in beliebigen Richtungen. Nachdem durch ein veränderliches Magnetfeld, die Richtung der Teilchenbewegung aber nicht deren Geschwindigkeit verändert wird, bleibt die Schwerpunktsgeschwindigkeit des Plasmas Null, wie in Abb.2.34 veranschaulicht.

- **$\vec{E} \times \vec{B}$-Drift**

  Bei der $\vec{E} \times \vec{B}$-Drift hingegen verändert das elektrische Feld die Geschwindigkeit der Teilchen. Dadurch ändert sich der Larmorradius und die Drift des Einzelteilchenbildes entsteht. Im Fluidbild bleibt diese erhalten, da bei der Aufsummierung der Teilchengeschwindigkeiten in einem kleinen Volumenelement, sich die einzelnen Beiträge nicht weg mitteln.

Der Vergleich der weiteren Driften, wie Polarisationsdrift, Drift in ungleichförmigen elektrischen Feldern etc. ist aufwändiger, da zum Teil die Teilchendichte wie sie im Fluidbild verwendet wird nicht identisch mit der Dichte der Führungszentren ist, wie sie die Grundlage des Einzelteilchenbildes darstellt.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

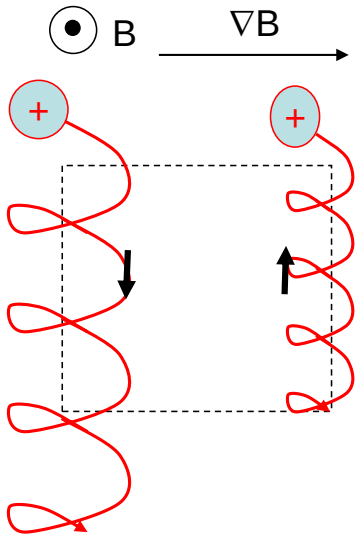


Abbildung 2.34: Vergleich Einzelteilchen-Fluidbild: ∇B Drift

Das Einzelteilchenbild ist eine gute Beschreibung von Plasmen, wenn der Transport *entlang* der Magnetfeldlinien betrachtet wird. Hier sind die freien Weglängen groß und viele Gyrationsradien werden stoßfrei durchlaufen. Für den Transport von Plasma senkrecht zu den Feldlinien ist allerdings das Fluidbild besser geeignet, da hier die Stöße der Teilchen untereinander wichtig sind, die zu einem Austausch von Teilchen zwischen benachbarten Feldlinien führt.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Kapitel 3

Stöße

Für die Beschreibung von Transportphänomenen in Plasmen ist es notwendig Stoßprozesse zu behandeln. Jeder Diffusionsprozeß wird angetrieben durch Gradienten in Dichte und Temperatur wobei Stoßprozesse der Teilchen untereinander oder mit dem Hintergrundgas diese Teilchenbewegung limitieren. Dies drückt man aus durch freie Weglängen bzw. Stoßfrequenzen. Um diese Quantitäten abzuleiten wird ein mikroskopisches Bild eines Stoßprozesses benötigt, daß durch einen Wirkungsquerschnitt gemäß der Art der Wechselwirkung beschrieben wird.

Wichtige Prozesse in Plasmen sind Streuprozesse der geladenen Teilchen untereinander sowie Ionisationsvorgänge. Durch eine quantitative Beschreibung der Erzeugungsrate von Ionen und deren Vernichtung läßt sich der Ionisationsgrades eines Plasmas bestimmen.

3.1 Definitionen

Der Transport von Teilchen in einem Plasma wird durch Stöße mit anderen Bestandteilen dieses Plasmas limitiert. Betrachtet man einen gerichteten Teilchenstrom Γ so wird er über eine Wegstrecke dx reduziert gemäß:

$$d\Gamma = -\sigma_{sc} n_g \Gamma dx \tag{3.1}$$

hier bezeichnet σ_{sc} den sogenannten **Wirkungsquerschnitt** für Streuung an einem Stoßpartner der Dichte n_g. Daraus ergibt sich die DGL:

$$\frac{d\Gamma}{dx} = -\sigma_{sc} n_g \Gamma \tag{3.2}$$

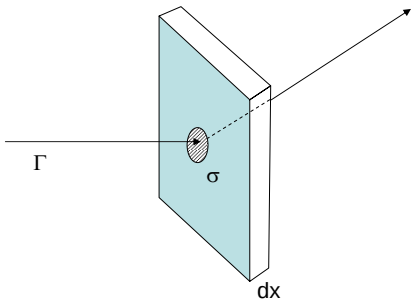


Abbildung 3.1: Stoß Wechselwirkung

mit folgender Lösung:

$$\Gamma = \Gamma_0 e^{-\frac{x}{\lambda}} \tag{3.3}$$

Die Länge λ bezeichnet man als **freie Weglänge**:

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\sigma_{sc} n_g}} \tag{3.4}$$

Dementsprechend kann man auch andere Größen definieren. Die mittlere **Stoßzeit** τ ist:

$$\boxed{\tau = \frac{\lambda}{v}} \tag{3.5}$$

Beziehungsweise die **Stoßfrequenz** ν ist:

$$\boxed{\nu = \tau^{-1} = n_g \langle \sigma_{sc} v \rangle} \tag{3.6}$$

Die Stöße der Teilchen mit einem andere Stosspartner werden in der Impulsbilanz wie folgt berücksichtigt:

$$mn \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \nabla \vec{v} \right] = n\vec{F} - \nabla p - \underbrace{m\vec{v}}_{Impulsverlust} \underbrace{n\nu_m}_{Haeufigkeit\ der\ Stoesse} \tag{3.7}$$

Der Index m bei der Stoßfrequenz ν_m berücksichtigt die Stoßfrequenz für den Verlust des Impulses, nicht des ganzen Teilchens (siehe unten). Die Kontinuitätsgleichung wird modifiziert durch Teilchenerzeugung und Teilchenrekombination. Für beide Prozesse kann man auch wieder Stoßfrequenzen angeben.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \vec{v} n = n\nu_{Ionisation} - n\nu_{Rekombination} \tag{3.8}$$

in der Regel gilt $\nu_m \gg \nu_{ionisation}$

3.2 differentieller Wirkungsquerschnitt

Die Streuung von zwei Teilchen aneinander, führt zu einem Energie- und Impulsübertrag, wobei das einfallende Projektil um einen Winkel Θ gestreut wird. Der Streuwinkel selbst ändert sich in charakteristische Weise mit dem **Stoßparameter** b, wie in Abb. 3.2 verdeutlicht. Mit kleiner werdendem Stoßparameter b vergrößert sich in der Regel der Streuwinkel.
Ein solcher Streuvorgang wird mit einem **Wirkungsquerschnitt** beschrieben. Für die Beschreibung eines Streuvorganges bei vorgegebenem Stoßparameter, verwendet man den differentiellen Wirkungsquerschnitt als denjenigen Anteil am gesamten Wirkungsquerschnitt, der zur Streuung in ein bestimmtes Raumwinkelelement $d\Omega$ führt. Teilchenerhaltung erfordert, dass der Fluß durch eine Fläche $d\sigma$, die durch einen Ring der Breite db und Radius b gegeben ist:

$$d\sigma = 2\pi b db \tag{3.9}$$

identisch ist mit dem Fluß durch eine Fläche dA, die durch einen Ring mit Öffnungswinkel $d\Theta$ auf einer Kugeloberfläche Radius R gegeben ist:

$$dA = R \sin\Theta 2\pi R d\Theta \tag{3.10}$$

Diese Fläche dA wird in einen Raumwinkel $d\Omega$ umgerechnet via:

$$d\Omega = dA \frac{1}{R^2} \tag{3.11}$$

Damit ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt zu:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\Theta} \frac{db}{d\Theta}} \tag{3.12}$$

d.h. für die Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnittes benötigen wir eine Beziehung zwischen dem sog. **Stoßparameter** b und dem Winkel unter dem das Teilchen gestreut wird.
Den totalen Wirkungsquerschnitt erhält man schließlich durch Integration über den ganzen Raumwinkel:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

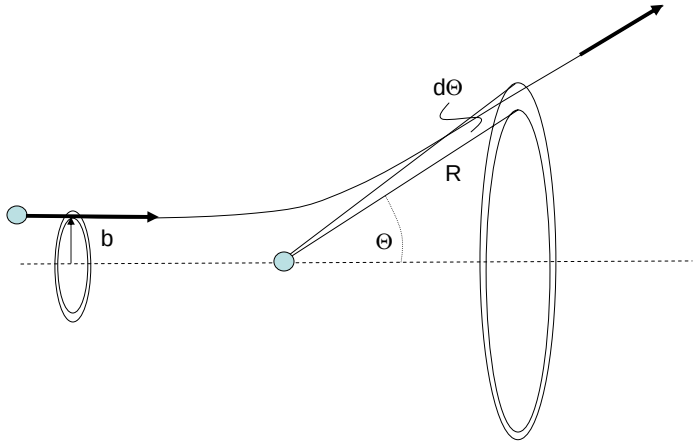


Abbildung 3.2: Der differentielle Wirkungsquerschnitt verknüpft die Streuung für gegebenen Stoßparameter b mit dem Raumwinkelelement $d\Omega$ in das gestreut wird.

$$\sigma_{sc} = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\Theta d\Theta \tag{3.13}$$

Für den Transport ist allerdings nicht der Verlust des Teilchens interessant bzw. die Wahrscheinlichkeit ob ein Streuprozeß stattgefunden hat, sondern inwieweit dieser Streuprozeß den Impuls reduziert hat. Der entsprechende Wirkungsquerschnitt für Impulsübertrag muß korrigiert werden um den Faktor:

$$dp = p - p\cos\Theta \tag{3.14}$$

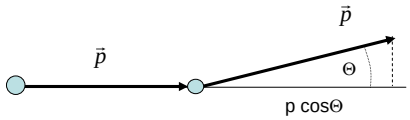


Abbildung 3.3: Beim Wirkungsquerschnitt für Impulsverlust beschreibt ist die Änderung der Richtung des Teilchens entscheidend.

$$\frac{dp}{p} = 1 - \cos\Theta \tag{3.15}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

damit ergibt sich:

$$\sigma_m = 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos\Theta) \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\Theta d\Theta \tag{3.16}$$

d.h. wird das Teilchen kaum abgelenkt d.h. $\Theta \sim 0$ wird $\cos\Theta$ zu eins und der Wirkungsquerschnitt σ_m verschwindet.

3.3 Das Streuproblem

Bislang wurde die Art des Streuprozeßes nicht spezifiziert. Bei der Lösung des Streuproblems ist es das Ziel die Abhängigkeit zwischen dem Stoßparameter b und dem Streuwinkel Θ zu bestimmen. Hierzu geht man praktischerweise vom **Schwerpunktsystem** aus. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist:

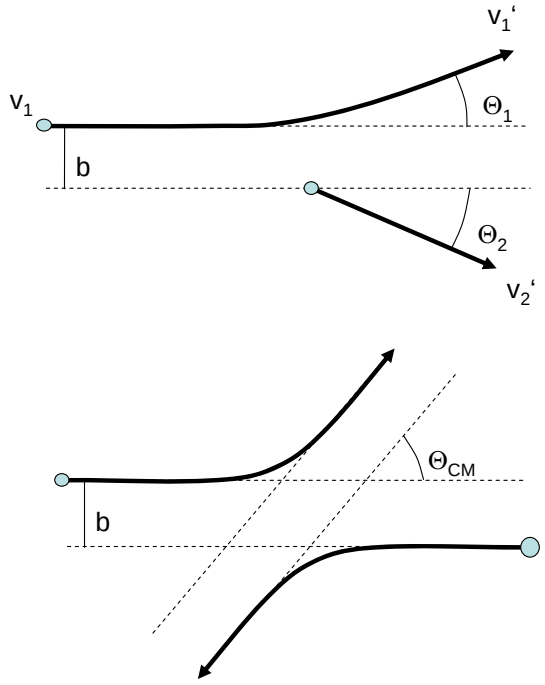


Abbildung 3.4: Laborsystem - Schwerpunktsystem

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{3.17}$$

Die reduzierte Masse m_{cm} ist:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$m_{cm} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{3.18}$$

Die Relativgeschwindikgeit vor dem Stoß:

$$v_R = v_1 - v_2 \tag{3.19}$$

die Streuwinkel Θ_1 und Θ_2 im Laborsystem sind mit dem Streuwinkel im Schwerpunktsystem Θ_{cm} gemäß Abb. 3.4 verknüpft:

$$\tan\Theta_1 = \frac{m_2 \sin\Theta_{cm}}{m_1 + m_2 \cos\Theta_{cm}} \tag{3.20}$$

$$\Theta_2 = \frac{1}{2}(\pi - \Theta_{cm}) \tag{3.21}$$

Der Energieverlust ergibt sich aus der Lösung der Energie- und Impulserhaltung für einen gegebenen Streuwinkel. Dies wird als **kinematischer Faktor** γ bezeichnet.

$$\boxed{\frac{\Delta E}{E} = \gamma = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}(1 - \cos\Theta_{cm})} \tag{3.22}$$

Der kinematische Faktor wird maximal bei einem zentralen Stoß. Man erhält:

$$\gamma = 4\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \tag{3.23}$$

Nach der Einführung dieser neuen Größen für das Schwerpunktsystem gilt es die Energieerhaltung zu lösen auf der Trajektorie:

$$\frac{1}{2}m_{cm}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}_{cm}^2\right) + V(r) = \frac{1}{2}m_{cm}v_R^2 \tag{3.24}$$

sowie die Drehimpulserhaltung:

$$m_{cm} v_R b = m_{cm} r^2 \dot{\Theta}_{cm} \tag{3.25}$$

Die Gleichungen 3.24 und 3.25 können ineinander eingesetzt werden unter Verwendung des Zusammenhangs:

$$\frac{d\Theta}{dr} = \frac{d\Theta}{dt}\frac{1}{\frac{dr}{dt}} \tag{3.26}$$

Man erhält schließlich das sogenannte **Stoßintegral**:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\boxed{\Theta_{cm} = \pi - 2b \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{1}{r^2 \left[1 - \frac{V}{\frac{1}{2} m_{cm} v_R^2} - \left(\frac{b}{r}\right)^2\right]^{1/2}} dr} \tag{3.27}$$

Hier werden die Streupotentiale $V(r)$ entsprechend der Art der Wechselwirkung eingesetzt und das Integral gelöst. Daraus entsteht die Abhängigkeit $\Theta(b)$ mit der anschließend der differentielle Wirkungsquerschnitt bestimmt wird.

3.4 Streupotentiale

3.4.1 Coulomb-Streuung, Coulomb-Logarithmus

Betrachten wir zunächst Coulomb-Streuung. Das Potential ist gegeben durch:

$$V = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{3.28}$$

Wird dies in das Stoßintegral eingesetzt ergibt sich folgende Lösung für den Zusammenhang zwischen b und Θ:

$$b = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m_{cm} v_R^2} \frac{1}{\tan \Theta/2} \tag{3.29}$$

Diese Gleichung kann kompakter geschrieben werden indem man mit b_0 den Abstand größter Annäherung zwischen den Stoßpartner bezeichnet. Ihn erhält man aus dem Gleichsetzen der kinetischen und potentiellen Energie.

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 b_0} = \frac{1}{2} m_{cm} v_R^2 \tag{3.30}$$

damit ergibt sich:

$$b = \frac{1}{2} b_0 \frac{1}{\tan \Theta/2} \tag{3.31}$$

und der differentielle Wirkungsquerschnitt für die sog. **Rutherford-Streuung**:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{b_0}{\sin^2 \Theta/2}\right)^2 \propto \frac{1}{E^2}} \tag{3.32}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

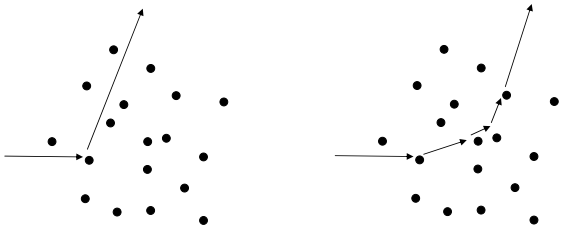


Abbildung 3.5: Einzelstoß vs. Kleinwinkelstöße

In Plasmen dominieren diese Coulomb-Stöße die Streuung der geladenen Teilchen. Um den totalen Wirkungsquerschnitt zu berechnen, muss der differentielle Wirkungsquerschnitt über alle Raumrichtungen integriert werden. Nachdem die Reichweite des Coulomb-Potentials aber unendlich ist, divergiert das Integral. Dieses Problem lässt sich lösen, wenn man einen maximalen Stoßparameter bzw. minimalen Ablenkwinkel definiert, der durch die Debyelänge bestimmt ist: in einem Plasma "sieht" ein Projektil das Target nur, wenn der Stoßparameter kleiner als die Debyelänge ist, da ansonsten die Targetladung abgeschirmt ist. Für die Bewertung der Transporteigenschaften von Ladungsträger in Plasmen ist allerdings eine weitere Abschätzung noch viel wichtiger. Die Ablenkung um z.B. 90 Grad kann innerhalb eines einzelnen Stoßes stattfinden oder als Aufeinanderfolge von Kleinwinkelstößen. Wie man zeigen kann ist der letzte Fall dominierend:

- Näherung eines Einzelstoßes

  Ein Stoß mit einem Streuwinkel von mind. 90° lässt sich aus dem differentiellen Wirkungsquerschnitt berechnen für Streuwinkel zwischen $\pi/2$ und π zu:

$$\sigma_{90,sc} = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{4} \left(\frac{b_0}{\sin^2 \Theta/2} \right)^2 2\pi \sin\Theta d\Theta = \frac{1}{4}\pi b_0^2 \qquad (3.33)$$

  Durch diese Einschränkung der Integrationsgrenzen vermeidet man das divergierenden Integral bei $\Theta \to 0$.

- Näherung Kleinwinkel-Stöße

  Im Vergleich dazu können sich viele Kleinwinkel-Stößen zu einer Ablenkung von 90 ° aufsummieren. Die Abhängigkeit $\Theta(b)$ ist:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\tan \Theta/2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 m_{cm} v_R^2} \frac{1}{b} \tag{3.34}$$

Für kleine Ablenkwinkel lässt sich der Tangens entwickeln und man erhält:

$$\Theta/2 \simeq \frac{1}{2} \underbrace{\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \frac{1}{2} m_{cm} v_R^2}}_{b_0} \frac{1}{b} \tag{3.35}$$

dies wird schließlich zu:

$$\Theta \simeq \frac{b_0}{b} \tag{3.36}$$

In der Folge stellen wir die Frage, wie viele dieser kleinen Ablenkungen man aufsummieren muss, um insgesamt eine Ablenkung um einem Winkel von 90° zu erhalten. Wir betrachten dazu die quadratische Abweichung von:

$$\langle \Theta^2 \rangle = \frac{1}{\pi b_{max}^2} \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{b_0^2}{b^2} 2\pi b db \tag{3.37}$$

dies wird zu:

$$\langle \Theta^2 \rangle = 2 \frac{b_0^2}{b_{max}^2} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} \tag{3.38}$$

hier sieht man wieder das Problem mit der unendlichen Reichweite des Coulomb-Potentials. Setzt man $b_{max} \to \infty$ ein, erhält man keinen endlichen Ausdruck für $\langle \Theta^2 \rangle$. Aus diesem Grund macht man folgende Abschätzung: in Plasmen ist der maximal zulässige Stoßparameter die Debyelänge, da bei Entfernungen die größer als die Debyelänge sind, das Potential des Stoßpartners vollständig abgeschirmt wird. Als Näherung für den minimalen Stoß-Parameter setzt man den minimalen Abstand b_0. Damit wird der sogenannte **Coulomb-Logarithmus** definiert:

$$\boxed{\ln \Lambda = \ln \frac{\lambda_D}{b_0}} \tag{3.39}$$

Die quadratische Abweichung soll nach einer Zeit τ_m genau 90° betragen. D.h. innerhalb einer Stoßzeit τ_m benötigen wir eine bestimmte

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Anzahl $N_{Stoesse}$ an Stoßprozessen mit einer mittleren Ablenkung $\langle\Theta\rangle$, die in der Summe $\pi/2$ ergeben. D.h. wir fordern

$$\langle\Theta^2\rangle N_{Stoesse} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \tag{3.40}$$

Diese Anzahl an Stößen kann man berechnen zu:

$$N_{Stoesse} = \underbrace{(\pi b_{max}^2)}_{maximale\ Flaeche} \underbrace{n_g v_R}_{Flussdichte} \tau_m \tag{3.41}$$

Diese Stoßzeit τ_m ist umgekehrt proportional zu unserem gesuchten Wirkungsquerschnitt $\sigma_{90,m}$ gemäß

$$\sigma_{90,m} = \frac{1}{n_g \lambda} = \frac{1}{n_g \tau_m v_R} \tag{3.42}$$

Wenn wir alles einsetzen, bekommen wir schließlich

$$\sigma_{90,m} = \frac{8}{\pi} b_0^2 \ln\Lambda \tag{3.43}$$

Der Vergleich zwischen Einzel-Stoß σ_{sc} und Vielfach-Streuung σ_m zeigt, dass die Vielfach-Streuung den Transport dominiert:

$$\frac{\sigma_{90,m}}{\sigma_{90,sc}} = \frac{32}{\pi^2} \ln\Lambda \simeq 30 \tag{3.44}$$

Der Coulomb-Logarithmus ist für viele Plasmen ungefähr $\ln\Lambda = 10$.
Die Streuung von geladenen Teilchen untereinander ist für die Beschreibung der voll-ionisierten Plasmen wesentlich. Insbesondere bei der Heizung eines Fusionsplasmas zu hohen Temperaturen sinkt der Widerstand der Plasmen aufgrund des Coulomb-Wirkungsquerschnittes zunehmend.

3.4.2 Polarisations-Streuung

Bei den teil-ionisierten Plasmen der Plasmatechnik sind die häufigsten Stoßprozesse der Ionen und Elektronen allerdings die Stöße mit dem neutralen Hintergrundgas.
Bei der sogenannten Polarisations-Streuung betrachtet man die Streuung eines geladenen Teilchen an einem neutralen Gasatom. Hierbei wird die Elektronenhülle des Neutralteilchens durch das elektrische Feld des vorbei fliegenden geladenen Teilchens polarisiert. Da Feld des geladenen Teilchens ist zunächst:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

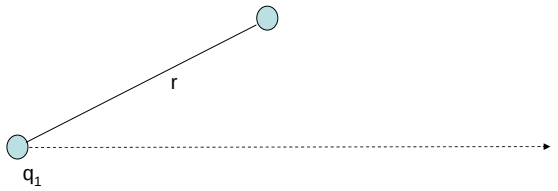


Abbildung 3.6: Polarisations-Streuung

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2} \tag{3.45}$$

Dieses Feld induziert ein Dipolmoment im neutralen Atom. Die Größe des Dipolmoments hängt von der Polarisierbarkeit α des Atoms ab:

$$\vec{p} = \alpha\vec{E} \tag{3.46}$$

Die potentielle Energie V dieses Dipols im Feld des geladenen Teilchens wird zu:

$$V = \vec{p}\vec{E} = \alpha E^2 = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{q_1^2}{r^4}\alpha \propto \frac{\alpha}{r^4} \tag{3.47}$$

man erhält ein Potential proportional zu $1/r^4$. Diesen Ausdruck setzt man in das Stoßintegral ein und berechnet wieder den Wirkungsquerschnitt. Bei der Analyse der Trajektorien beobachtet man, daß bei kleine Stoßparametern, das geladene Teilchen von dem Neutralteilchen eingefangen wird (siehe Abb. 3.7). Der Stoßparameter bei dem der Übergang zwischen Ablenkung und Einfang auftritt definiert den **Langevin Einfangquerschnitt**:

$$\boxed{\sigma_L = \pi b_L^2 = \left(\frac{\pi\alpha q^2}{\epsilon_0 m_{cm}}\right)^{1/2}\frac{1}{v_R}} \tag{3.48}$$

Die wesentliche Skalierung des Langevin-Querschnitts ist proportional v^{-1}. D.h. mit höheren Geschwindigkeiten der Ladungsträger sinkt der Wirkungsquerschnitt. Dieser Abfall zu hohen Teilchengeschwindigkeiten erfolgt langsamer als bei der Coulomb-Streuung (v^{-4}). Der Streuquerschnitt hängt insbesondere von der Polarisierbarkeit des neutralen Gases ab. In Tabelle 3.1 sind die Polarisierbarkeiten einiger Elemente aufgelistet.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

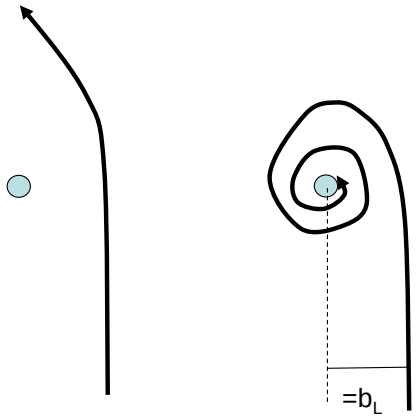


Abbildung 3.7: Bei der Polarisationsstreuung findet unterhalb eines gewissen Stoßparameters der Einfang des geladenen Teilchens statt. Die Querschnittsfläche mit diesem Stoßparameter bezeichnet man als Langevin Einfang-Wirkungsquerschnitt.

Element	rel. Polarisierbarkeit
H	4.5
Ar	11.08
Cl_2	31
SF_6	30
CCl_4	69

Tabelle 3.1: Relative Polarisierbarkeit $\alpha_R = \frac{\alpha}{a_0^3}$ (a_0 Bohr'scher Radius)

Insbesondere Halogenide zeichnen sich durch eine hohe Polarisierbarkeit auf. In der Anwendung nutzt man diese Tatsache in Leuchtstoffröhren bzw. Plasmalampen (siehe Abb. 3.8). Dort befindet sich immer eine kleine Menge Quecksilber in der Entladung. Durch den großen Wirkungsquerschnitt kann man den elektrischen Widerstand in dem Plasma erhöhen und kann somit die Ladung mit hohen Spannungen aber kleinen Strömen betreiben. Auch für das Heizen mit elektrischen Wechselfeldern sind Stöße der Elektronen mit dem Hintergrundgas für die Effizienz der Heizung wesentlich. Bei neueren Plasmalampen muß allerdings das Quecksilber oder andere Halogenide zunächst verdampfen. Dies geschieht nach dem Einschalten der Lampe durch das langsame Aufheizen des Lampenkolbens. Dies benötigt einige Zeit. Mit steigender Halogenid-Konzentration in dem Plasma steigt die Effizient der

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Energieeinkopplung die Lichtintensität bei neuen Plasmalampen (Energiesparlampe) nimmt langsam zu bis sie den Gleichgewichtswert erreicht hat.

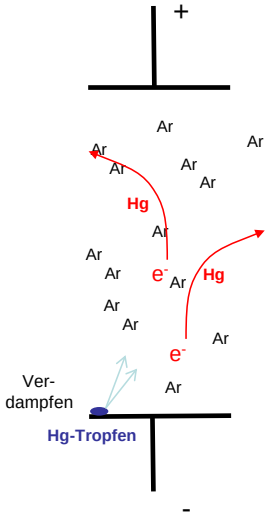


Abbildung 3.8: Beimischung von Quecksilber in einer Energiesparlampe erhöht den elektrischen Widerstand des Plasmas und damit die dissipierte Leistung im Plasma selber. Mit dieser dissipierten Leistung steigt gleichzeitig die Lichtausbeute.

Eine weitere Besonderheit der Polarisationsstreuung ist das **Ramsauer-Minimum** bei der Streuung von Elektronen an Edelgasatomen. Hierbei kommt es zu einer quantenmechanischen Interferenz der einfallenden Elektronenwelle mit den Wellenfunktion der Elektronen im Atom. Durch diese Interferenz bekommt man ein Minimum im Wirkungsquerschnitt bei kleinen Elektronenenergien. Bei Molekülen tritt dieser Effekt in der Regel nicht auf, da dort ein Vielzahl von Anregungsmöglichkeiten (Rotation und Schwingungen) existieren die weiterhin zu einem großen Streuquerschnitt führen (siehe Abb. 3.9).

3.4.3 Ionisation

Die Ionisation durch Elektronenstoß kann korrekterweise nur durch die Gesetze der Quantenmechanik beschrieben werden. Als einfache klassische Näherung kann man auch den Impulsübertrag auf ein gebundenes Elektron in der Atomhülle betrachten. Der Energieübertrag in so einem Stoßprozeß ist:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

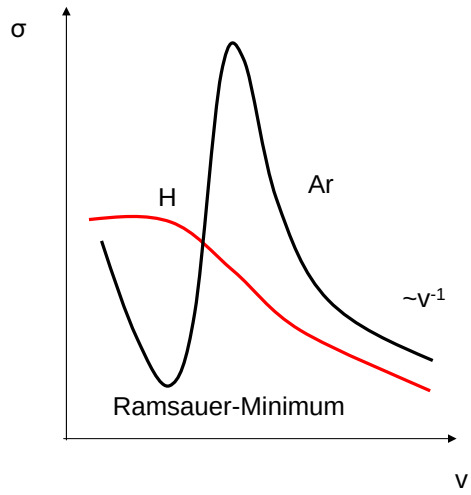


Abbildung 3.9: Typischer Verlauf des Langevin-Wirkungsquerschnitt (rot).

$$\Delta E = E\, 2\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}(1-\cos\Theta_{cm}) \tag{3.49}$$

Da kleine Winkel dominieren, machen wir die Näherung

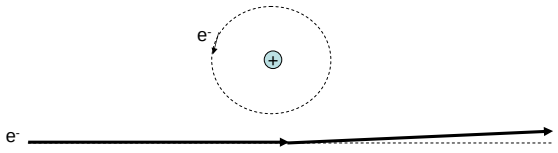


Abbildung 3.10: Ionisation in klassischer Betrachtung

$$\cos\Theta_{cm} \simeq 1 - \frac{\Theta_{cm}^2}{2} \tag{3.50}$$

Gl. gilt für den Streuwinkel im Schwerpunktsystem (CM). Im Laborsystem (LB) wird $\Theta_{LB} \to \Theta_{CM}/2$ für Stoßpartner mit gleicher Masse $m_1 = m_2$. Im folgenden bezeichnen wir mit Θ den Streuwinkel im Laborsystem. Der Energieübertrag im Laborsystem wird zu

$$\Delta E = \Theta^2 E \tag{3.51}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Genauso läßt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem (CM) für kleine Streuwinkel Θ schreiben ($\sin^4 \Theta_{CM}/2 = \Theta^4$):

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{CM} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{E^2}\frac{1}{\Theta^4} \tag{3.52}$$

in das Laborsystem umrechnen via $E_{CM} = \frac{1}{2}E_{LB}$ und $m_{cm} = \frac{1}{2}m_{LB}$:

$$d\sigma|_{LB} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{E^2}\frac{1}{\Theta^4} 2\pi \underbrace{\sin\Theta}_{\propto\Theta} d\Theta \tag{3.53}$$

wir gehen über von einem Raumwinkelelement zu einem Energieübertrag ΔE mit:

$$d(\Delta E) = E 2\Theta d\Theta \tag{3.54}$$

damit wird

$$d\sigma = \pi \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{E}\frac{1}{(\Delta E)^2} d(\Delta E) \tag{3.55}$$

Diese Gleichung integrieren wir vom minimalen Energieübertrag gegeben durch die Ionisationsenergie bis zur Gesamtenergie E des Elektrons.

$$\sigma(E) = \int_{E_{Ionisation}}^{E} \pi \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{E}\frac{1}{(\Delta E)^2} d(\Delta E) \tag{3.56}$$

damit erhalten wir schließlich den **Thomson Wirkungsquerschnitt** für Ionisation:

$$\boxed{\sigma_{Ionisation} = \pi \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{E}\left(\frac{1}{E_{Ionisation}} - \frac{1}{E}\right)} \tag{3.57}$$

3.5 Ionisationsgleichgewichte

Bei der Beschreibung von Plasmen ist der Ionisationsgrad, d.h. die Konzentration der Ladungsträger im Verhältnis zur gesamten Teilchenzahldichte, maßgeblich für das Verhalten des Plasmas. In der Plasmatechnik ist der Ionisationsgrad in der Regel klein im Bereich bon wenigen Prozent, während in der Fusionsphysik die Plasmen in der Regel voll-ionisiert sind. Zudem werden in diesen heißen Plasmen die Atome mehrfach ionisiert.
Für die Dichte eines einfach ionisierten Atoms der Kernladungszahl Z, kann man folgende Ratengleichung aufstellen:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

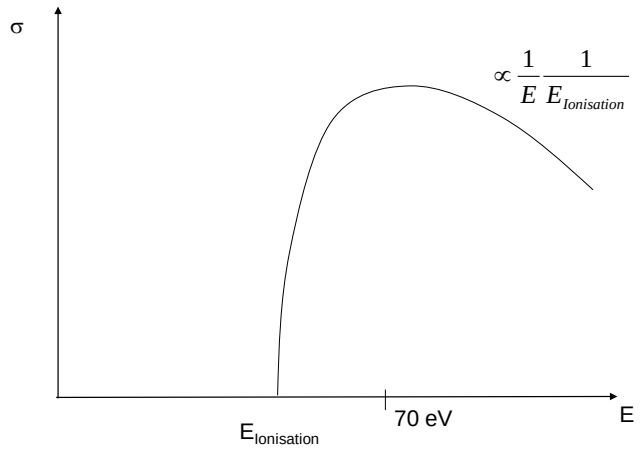


Abbildung 3.11: Typischer Verlauf des Wirkungsquerschnittes für Ionisation.

$$\frac{dn_{Z+1}}{dt} = S_Z n_Z n_e - \beta_{Z+1} n_{Z+1} n_e n_e - \frac{n_{Z+1}}{\tau} \tag{3.58}$$

Der erste Term beschreibt die Elektronenstoß-induzierte Ionisation der Atome im Grundzustand. Der zweite Term beschreibt die Rekombination des Ions mit den Elektronen. Dies ist in der Regel eine Dreier-Stoß-Rekombination, da nur dann die Impuls- und Energieerhaltung gewährleistet werden kann. Prinzipiell könnte man noch zusätzlich Terme hinzufügen, z.B. die Zweifach-Ionisation. Allerdings haben diese Reaktionen einen kleinen Wirkungsquerschnitt so daß für die Konzentration der Ionen im wesentlichen nur die benachbarten Ionisationzustände wichtig sind. Der dritte Term beschreibt die endliche Einschlußzeit τ der ionisierten Atome in dem Plasma. Diese Einschlusszeit kann durch die Diffusion oder Drift der Teilchen zu den Begrenzungen des Systems gegeben sein, wie im folgenden Kapitel näher diskutiert wird.
Die Dominanz der Terme in Gl. 3.58 hängt von dem betrachteten Systemen ab. In sehr dichten Plasmen mit einer ausreichende Zahl von Stößen, ist die Rekombination der Ionen maßgeblich für deren Verlust. Ein Beispiel wären thermischen Hochdruckplasmen, wie Flammen etc.. Gleichzeitig kann in einem magnetfeld-geführten Plasma, wie in Fusionsexperimenten, die Einschlusszeit sehr lang werden. In solchen Systeme dominieren die ersten beiden Terme in Gl. **??**. Im Gegensatz dazu stehen kalte dünnen Plasmen der

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Niederdruck-Plasmatechnik. Dort ist die Einschlußzeit oftmals kurz, und bei niedrigen Drücken dominieren die Terme 1 und 3 in Gl. 3.58.
Im folgenden wollen wir jedoch den Fall betrachten, daß ausreichend Stöße stattfinden und die Einschlußzeit τ sehr lang wird. Ein Beispiel für so ein Gleichgewicht zwischen der Konzentration an Atomen und Ionen in einem Wasserstoff-Plasma wäre zum Beispiel:

$$\mathrm{H} + \mathrm{e}^- \rightleftarrows \mathrm{H}^+ + 2\mathrm{e}^- \tag{3.59}$$

Im stationären Gleichgewicht ergibt sich somit aus Gl. 3.58:

$$S_z n_z n_e = \beta_{Z+1} n_e^2 n_{Z+1} \tag{3.60}$$

Dies hat die Form eines Massenwirkungsgesetzes. Die Gleichgewichts-Konstante $f(T_e)$ ist nur noch eine Funktion der Temperatur.

$$\frac{n_e n_{Z+1}}{n_Z} = \frac{S_Z}{\beta_{Z+1}} = f(T_e) \tag{3.61}$$

Nach unserer Annahme, daß Stöße der Teilchen untereinander zu einer Thermalisierung führen (die Art der mikroskopischen Prozesse ist unerheblich), können wir die Besetzung der einzelnen Atom- bzw. Ionisationsniveaus mit Hilfe der Boltzmann-Statistik beschreiben:

$$\frac{n_{Z+1}}{n_Z} = \frac{g_{Z+1}}{g_Z} e^{-\frac{E_{Z+1}-E_Z}{k_B T_e}} = \frac{g_{Z+1}}{g_Z} e^{-\frac{\chi_Z}{k_B T_e}} \tag{3.62}$$

mit E_{Z+1} und E_Z den Bindungsenergien der Niveaus und $\chi_Z = E_{Z+1} - E_Z$ der Ionisationsenergie. g_{Z+1} und g_Z bezeichnen die entsprechenden Entartungen. Die Dichte der Elektronen bei gegebener Temperatur T_e ergibt sich aus der Zustandsdichte.

$$\frac{dN_e}{dE} = g(E) \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1} \tag{3.63}$$

Die Fermiverteilung kann bei dünnen Plasmen für die gilt $E_F \ll k_B T_e$ mit der Boltzmann-Verteilung angenähert werden, wie in Abb. 3.10 illustriert.

$$\frac{dN_e}{dE} = g(E) e^{-\frac{E}{k_B T}} \tag{3.64}$$

Die Entartung $g(E)$ eines freien Elektronengases ergibt sich aus dem Abzählen der Zustände im Phasenraum zu:

$$\frac{dN_e}{dE} = V \frac{8\pi \left(2m_e^3\right)^{1/2}}{h^3} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{k_B T_e}} \tag{3.65}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

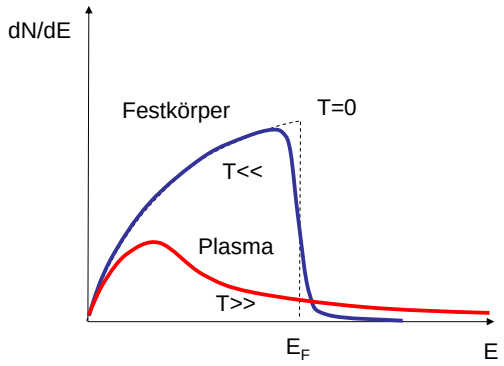


Abbildung 3.12: Zustandsdichte der Elektronen in einem Festkörper und in einem Plasma.

Damit ist die Elektronendichte in Abhängigkeit von deren Temperatur:

$$n_e = \frac{2\left(2\pi m_e k_B T_e\right)^{3/2}}{h^3} \tag{3.66}$$

Setzen wir dies in Gl. 3.61 ein, so erhalten wir schließlich die sog. **Saha-Gleichung** für das Verhältnis der Besetzungsdichten untereinander.

$$\boxed{\frac{n_e n_{Z+1}}{n_Z} = \frac{g_{Z+1}}{g_Z}\frac{2\left(2\pi m_e k_B T_e\right)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{\chi}{k_B T_e}}} \tag{3.67}$$

Bei gegebener Temperatur haben wir immer noch drei Unbekannte auf der linken Seite der Gleichung. Neben der Boltzmann-Besetzung 3.62 benötigen wir noch zwei Gleichungen um die Unbekannten zu bestimmen. Dies sind die Quasineutralität

$$n_e = \sum_{Z=1}^{Z_{max}} Z n_Z \tag{3.68}$$

und die Vorgabe eines Druckes bzw. einer Gesamtteilchendichte

$$n_0 = \sum_{Z=0}^{Z_{max}} n_Z \tag{3.69}$$

Betrachten wir den einfachen Fall eines schwach ionisierten Wasserstoffplasmas. Die Grundzustandsdichte der Atome n_Z ist hier sehr viel größer als die Ionendichte n_{Z+1}. Damit bekommen wir dann:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\frac{n_e^2}{n_0} = \frac{g_{H^+}}{g_H} \frac{2\left(2\pi m_e k_B T_e\right)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{13.6eV}{k_B T_e}} \tag{3.70}$$

Oftmals ist die Stoßrate allerdings kleiner, so daß die Annahme einer Thermalisierung der Zustände nicht gerechtfertigt ist. Für angeregte Ionisationsstufen kann man allerdings immer noch eine Gleichgewichtsbedingung annehmen. Im Fall eines hoch angeregten Ions, werden die elektronischen Zustände stark Wasserstoff-ähnlich und die Niveaus liegen auf der Energieskala eng beieinander (Hauptquantenzahl $n \to \infty$). Da die Zustände dieser angeregten Ionen damit gut überlappen, ist der Wirkungsquerschnitt für die Stoßwechselwirkung sehr groß. D.h. die angeregten Zustände untereinander thermalisieren. Für diese Untermenge der angeregten Zustände läßt sich ein **partielles lokales thermisches Gleichgewicht** (PLTE partial local thermal equilibrium) angeben. Die beschreibende Gleichung ist die **Saha-Boltzmann-Gleichung** bei der der Index k die Anregungsstufe des Ions angibt ($k = 1$ entspricht dem Grundzustand). Man bekommt:

$$\frac{n_e n_{Z+1,1}}{n_{Z,k}} = \frac{g_{Z+1,1}}{g_{Z,k}} \frac{2\left(2\pi m_e k_B T_e\right)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{E_{Z+1,1}-E_{Z,k}}{k_B T_e}} \tag{3.71}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Kapitel 4

Transport

Transportprozesse bestimmen die Güte des Einschlußes eines Plasmas. Teilchen und Energie werden durch einen Dichtegradienten oder elektrische Felder getrieben transportiert. Dieser Transport ändert sich grundsätzlich in magnetisierten Plasmen, da durch die Magnetfeldlinien eine Vorzugsrichtung der Teilchenbewegung definiert ist. Der Transport senkrecht zu dieser Richtung ist in erster Näherung unterdrückt. Trotzdem wird der Plasmaeinschluss nicht beliebig gut, da zahlreiche Prozesse wie makroskopische und mikroskopische Instabilitäten, Turbulenz, Rekonnektion und Driftprozesse den Transport senkrecht zu den Feldlinien erhöht.

Zur Beschreibung von Transportprozesse startet man zunächst in dem Fluidbild, daß um einen Stoßterm erweitert wird. In vollionisierten Plasmen läßt sich das Fluidbild weiter vereinfachen mit der MHD (Magnetohydrodynamik).

4.1 Diffusion und Drift im Fluidbild

Wir gehen wieder von der Impulsbilanz unserer Ionen- oder Elektronen-Flüssigkeit aus. Diese wird erweitert durch einen einfachen Ansatz für den Stoßterm, die Relaxations-Näherung. Die Impulsänderung in einem Fluidelement ist gegeben durch den Impuls der verloren geht in einem Stoß ($\sim m\vec{v}$) mal der Häufigkeit für diesen Prozess ($\sim n\nu_m$). Damit ergibt sich:

$$mn\left[\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}\right] = qn\vec{E} - \nabla p - m\vec{v}n\nu_m \tag{4.1}$$

Im stationären Fall wird die Zeitableitung zu Null gesetzt. Unter der Annah-

me dass $\nu_m \gg v$ ist (wir betrachten den Fall hoher Stoßfrequenzen) kann auch der zweite Term auf der linken Seite proportional zu v^2 vernachlässigt werden. Damit ergibt sich:

$$\vec{v} = \frac{1}{mn\nu_m}\left(\pm en\vec{E} - \nabla p\right) \tag{4.2}$$

Unter Verwendung des idealen Gasgesetzes ergeben sich zwei Fälle. Bei isothermer Zustandsänderung gilt:

$$\nabla p = kT\nabla n \tag{4.3}$$

bei adiabatischer Zustandsänderung (d.h. die Temperatur bleibt nicht konstant bei einer Druckänderung) gilt die Adiabatengleichung:

$$\frac{\nabla p}{p} = \gamma\frac{\nabla n}{n} \tag{4.4}$$

Hierbei ist γ gegeben durch

$$\gamma = \frac{2+N}{N} \tag{4.5}$$

mit N der Zahl der Freiheitsgrade. Für eine isotherme Zustandsänderung ergibt sich demnach folgender Ausdruck für die Geschwindigkeit der Elektronen bzw. Ionen im Fluidbild:

$$\vec{v} = \pm\frac{e}{m\nu_m}\vec{E} - \frac{kT}{m\nu_m}\frac{\nabla n}{n} \tag{4.6}$$

$$\vec{j} = n\vec{v} = n\frac{\pm e}{m\nu_m}\vec{E} - \frac{k_BT}{m\nu_m}\nabla n \tag{4.7}$$

Der erste Term beschreibt den Teilchenfluss, der durch ein elektrisches Feld getrieben wird, der Drift. Der zweite Term entspricht einem Teilchenfluss, der durch einen Dichtegradienten getrieben wird, der Diffusion. Dementsprechend ergibt sich die sog. **Beweglichkeit** zur Beschreibung der Drift als:

$$\boxed{\mu = \frac{|q|}{m\nu_m}} \tag{4.8}$$

und die **Diffusionskonstante** als:

$$\boxed{D = \frac{k_BT}{m\nu_m}} \tag{4.9}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Die Verknüpfung zwischen Drift und Diffusion ist durch die **Einsteinbeziehung** gegeben:

$$\boxed{\mu = \frac{|q|}{k_b T} D} \tag{4.10}$$

Als Beispiel betrachten wir die Lösung der Kontinuitätsgleichung für ebene Geometrie für ein neutrales Gas, d.h. der Driftterm fällt weg. Die Geometrie ist in Abb.4.1 skizziert.

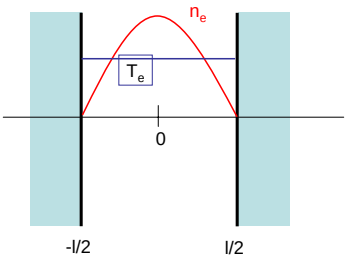


Abbildung 4.1: Geometrie zur Lösung der Diffusionsgleichung in einer Dimension.

Als Ansatz ergibt sich:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(-D\nabla n) = 0 \tag{4.11}$$

unter der Annahme, daß D räumlich konstant ist (wegen der hohen Wärmeleitfähigkeit erfolgt oft ein schneller Ausgleich der Temperatur in einem Plasma, d.h. die Temperatur ändert sich räumlich nicht) ergibt sich:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n \tag{4.12}$$

wir machen einen Separationsansatz für die Dichte n gemäss

$$n = u(t)w(x) \tag{4.13}$$

und separieren die Variablen.

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{1}{w}\nabla^2 w = \text{const.} = -\frac{1}{\tau} \tag{4.14}$$

da die linke Seite nur von der Zeit und die rechte nur vom Ort abhängt, müssen beide Seiten jeweils eine Konstante ergeben. Wir definieren diese

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

sinnigerweise als -1/τ. Die Zeitabhängigkeit ergibt sich aus der Lösung der DGL:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\tau}u \tag{4.15}$$

daraus folgt

$$u(t) = u_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{4.16}$$

Die Lösung der Ortsabhängigkeit ergibt sich aus der DGL:

$$-\frac{1}{D\tau} = \frac{1}{w}\nabla^2 w \tag{4.17}$$

mit der Definition einer Geometriekonstante $\Lambda = \sqrt{D\tau}$ ergibt sich

$$-\frac{1}{\Lambda^2}w = \nabla^2 w \tag{4.18}$$

mit der Lösung

$$w(x) = w_0 \cos\frac{x}{\Lambda} + ...+ \tag{4.19}$$

in ebener Geometrie mit Randbedingung $n = 0$ für $x = \pm l/2$ ergibt sich als Geometriekonstante Λ:

$$\Lambda = \frac{l}{\pi} \tag{4.20}$$

für andere Geometrien wie Zylindergeometrie oder sphärische Probleme ergeben sich entsprechend andere Geometriekonstanten (bei Zylindergeometrie ist die Ortsabhängigkeit durch Besselfunktionen gegeben). Die Lösung in einer Dimension lautet:

$$n(x,t) = n_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) \tag{4.21}$$

D.h. das Dichteprofil, das durch Diffusion von Neutralen entsteht entspricht einem Cosinus. Dies bezeichnet man als Grundmode der Diffusion. Dieses Dichteprofil zerfällt in der Zeit exponentiell. Auch wenn eine anfängliche Dichteverteilung von dem Cosinusprofil abweicht, so entsteht sehr schnell durch den Zerfall höherer Moden schließlich die Cosinusverteilung, die danach exponentiell kleiner wird. Je nach Geometrie erhält man typische Lösungen der Diffusionsgleichung. In Zylindergeometrie sind dies Besselfunktionen.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

4.2 Transport in teil-ionisierten Plasmen

4.2.1 ambipolare Diffusion

Bislang haben wir die Diffusion von neutralen Teilchen betrachtet, d.h. der Drift-Term spielte keine Rolle. Im Fall von Elektronen und Ionen könnte man annehmen, dass diese unterschiedliche Dichteprofile haben, da ja auch ihre Transportkoeffizienten, Diffusion und Beweglichkeit wegen der Masse stark unterschiedlich sind. Dies würde allerdings bedeuten, dass das Elektronenprofil sehr viel schneller zerfällt als das Ionenprofil. Es baut sich ein elektrisches Feld auf, dass diesem Zerfall entgegen steht, um die Quasineutralität in dem Plasma aufrecht zu erhalten. Geht man von der Bedingung aus, dass der Ionen- und Elektronenfluss gleich sein muß:

$$\vec{j} = \mu_i n_i \vec{E} - D_i \nabla n_i = -\mu_e n_e \vec{E} - D_e \nabla n_e \tag{4.22}$$

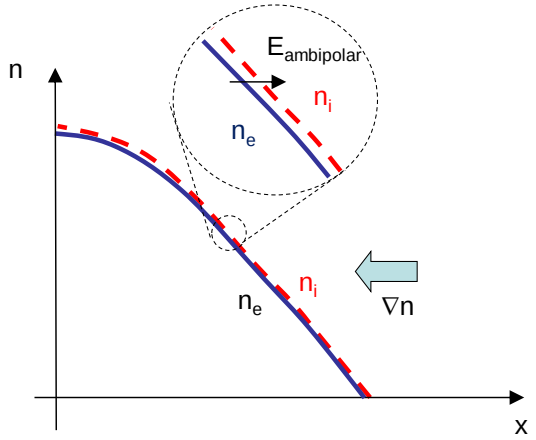


Abbildung 4.2: Das ambipolare elektrische Feld entsteht bei einem Dichtegradienten im Plasma, um die Ionen zu beschleunigen und die Elektronen abzubremsen. Dies kompensiert die unterschiedlichen Beweglichkeiten und Diffusionskonstanten von Elektronen und Ionen und garantiert somit Quasineutralität.

Das elektrische Feld, das dabei entsteht sorgt dafür, dass den voraus eilenden Elektronen die Ionen nachgezogen werden. Man bezeichnet dies als **ambipolares Feld**:

$$\vec{E}_{amb} = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n} \tag{4.23}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Hierbei wurde angenommen, dass $j_i = j_e$, $n_e = n_i$ und $\nabla n_e = \nabla n_i$ gilt. Der Teilchenfluss ergibt demnach

$$\vec{j} = \mu_i n \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n} - D_i \nabla n = -\frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n \tag{4.24}$$

Dies entspricht wieder formal einer Diffusionsgleichung mit einem neuen **ambipolaren Diffusionskoeffizienten**:

$$\boxed{D_{amb} = \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e}} \tag{4.25}$$

ganz generell gilt daß $\mu_e \gg \mu_i$. Dementsprechend wird

$$D_{amb} = \frac{\frac{\mu_i}{\mu_e} D_e + D_i}{\frac{\mu_i}{\mu_e} + 1} \simeq D_i + \frac{\mu_i}{\mu_e} D_e = D_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \tag{4.26}$$

hierbei wurde die Einsteinbeziehung für die letzte Umwandlung bemüht. Wenn die Elektronentemperatur größer als die Ionentemperatur ist (wie in Niederdruckplasmen), ergibt sich:

$$D_{amb} = D_i \frac{T_e}{T_i} = \frac{k_B T_e}{M \nu_{m,Ionen}} \tag{4.27}$$

d.h. der Transport ist getrieben durch die Temperatur der Elektronen, aber mit der Trägheit der Ionen.
Für den Fall eines Plasmas wollen wir die ambipolare Diffusion bemühen, um die Gleichgewichtsbedingung eines begrenzten Plasmavolumens abzuleiten. Dies entspricht der Idee des **globalen Modells**. Wir gehen wieder von der Kontinuitätsgleichung aus, mit dem Ansatz, dass der Teilchenfluss durch die ambipolare Diffusion getrieben sei. Zusätzlich suchen wir stationäre Lösungen (d.h. die Zeitableitung wird zu Null gesetzt). Wir nehmen zudem an, dass in unserem Volumen Ionisation stattfindet (d.h. neue Teilchen werden erzeugt). Damit ergibt sich

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(-D \nabla n) = n \nu_{ionisation} \tag{4.28}$$

mit einer stationären Lösung unter der Annahme das $T_e \gg T_i$

$$0 = n \nu_{ionsation} + D_{amb} \nabla^2 n \tag{4.29}$$

auch diese Differentialgleichung hat wieder eine Lösung der Form

$$n(x) = n_0 \cos \frac{\pi}{l} x \tag{4.30}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Ein Vergleich mit der Lösung der Diffusionsgleichung für Neutrale gemäß Gl. 4.20 liefert automatisch:

$$\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 = \frac{\nu_{ionisation}}{D_{amb}} \tag{4.31}$$

beziehungsweise

$$\nu_{ionisation} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{k_B T_e}{M \nu_m} \tag{4.32}$$

falls man jetzt als Ionisationsfrequenz einfach ein exponentielles Gesetz ansetzt (gemäß einer Anregungsenergie für Ionisation) so erhält man:

$$\nu_{ionisation} = \nu_0 e^{-\frac{E_{ionisation}}{k_B T_e}} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{k_B T_e}{M \nu_m} \tag{4.33}$$

Auf der linken Seite steht ein Ausdruck mit einer Exponentialfunktion in T_e und auf der rechten Seite eine Funktion linear in T_e. Die Abhängigkeiten des globalen Modells von der Größe der Entladung (l), der Elektronentemperatur (T_e) und der Ionisationsenergie ($E_{ionisation}$) sind in Abb. 4.3 veranschaulicht.

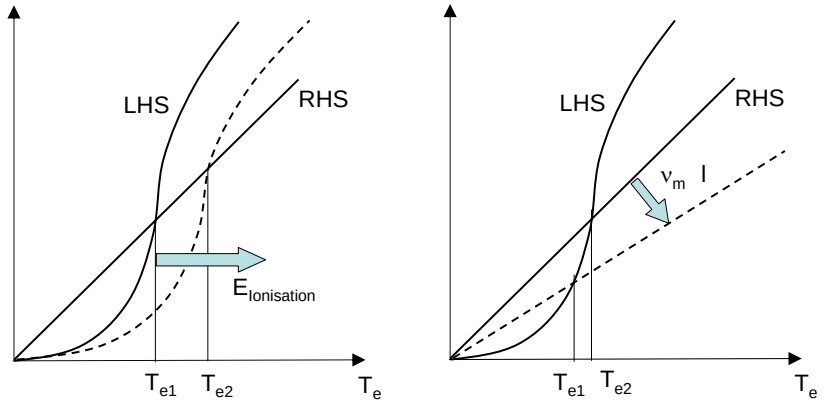


Abbildung 4.3: Globales Modell nach Gl. 4.33 . Der Transport der Ionen ist diffusions-limitiert.

Man erkennt, dass die Temperatur je nach Geometrie und Gasart steigen oder abnehmen kann: Ein Gas mit hoher Ionisationsenergie, führt zu einer hohen Elektronentemperatur. Eine Vergrößerung des Plasmavolumens verbessert das Oberflächen-zu-Volumen-Verhältnis. Die Elektronentemperatur

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

sinkt, da die Verlustrate an Ionen zurück geht und eine geringere Ionisationsrate ausreicht um eine gegebene Ladungsträgerdichte aufrecht zu erhalten. In Analogie läßt sich ein globales Modell für Ionen konstruieren, bei der der Verlust der Ionen durch die Bohm-Geschwindigkeit (siehe Kapitel 7) an der Randschicht gegeben ist.

4.2.2 Diffusion senkrecht zum B-Feld

Bislang haben wir den Transport ohne B-Feld betrachtet, beziehungsweise den Transport entlang der B-Feld Linien. Der Transport senkrecht zu den B-Feld Linien kann nur auftreten, wenn Stöße stattfinden, wie in Abb. 4.4 verdeutlicht:

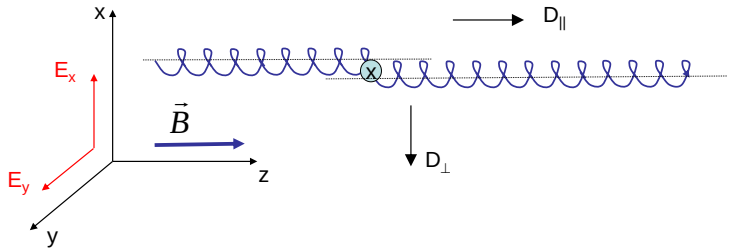


Abbildung 4.4: Der Transport senkrecht zum Magnetfeld findet nur durch Stöße statt.

Dies ist ein wichtiger Unterschied: der Transport entlang der Feldlinien wird behindert durch Stöße mit Neutralen, für den Transport senkrecht zum Magnetfeld sind Stöße essentiell! Man kann sich den Transport senkrecht zum Magnetfeld als **random walk** des Führungszentrums vorstellen (Abb. 4.5). Die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens ergibt sich aus:

$$mn\frac{dv_\perp}{dt} = qn(\vec{E} + \vec{v}_\perp \times \vec{B}) - k_B T \nabla n - mn\nu_m \vec{v} \tag{4.34}$$

Die linke Seite von Gl. 4.34 beschreibt nur die explizite Gyrationsbewegung. Wir wollen allerdings nur die Driftbewegung bestimmen und können deshalb die linke Seite wieder zu Null setzten. Damit ergibt sich in x-Richtung:

$$mn\nu_m v_x = \pm enE_x - k_B T_e \frac{\partial n}{\partial x} \pm env_y B \tag{4.35}$$

Das obere Zeichen gilt für Ionen das untere für Elektronen. In y-Richtung ergibt sich:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

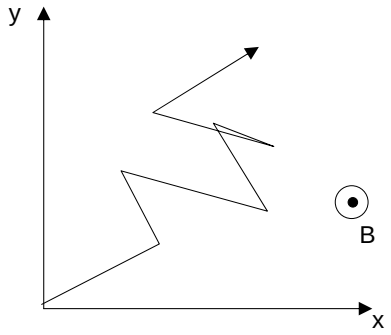


Abbildung 4.5: Diffusion senkrecht zum Magnetfeld entspricht einem random walk des Führungszentrums.

$$mn\nu_m v_y = \pm enE_y - k_B T_e \frac{\partial n}{\partial y} \mp env_x B \tag{4.36}$$

Daraus ergibt sich der Ausdruck für v_x zu:

$$v_x = \pm \frac{e}{m\nu_m} E_x - \frac{1}{n} \frac{k_B T}{m\nu_m} \frac{\partial n}{\partial x} \pm \frac{eB}{m\nu_m} v_y \tag{4.37}$$

bzw.

$$v_x = \pm \mu E_x - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \pm \frac{\omega_c}{\nu_m} v_y \tag{4.38}$$

jetzt v_y einsetzten und $\tau = \nu_m^{-1}$ ersetzen. Damit ergibt sich folgender Ausdruck:

$$v_x(1 + \omega_c^2 \tau^2) = \pm \mu E_x - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial x} + \omega_c^2 \tau^2 \frac{E_y}{B} \mp \omega_c^2 \tau^2 \frac{k_B T}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} \tag{4.39}$$

Für v_y erhält man einen analogen Ausdruck:

$$v_y(1 + \omega_c^2 \tau^2) = \pm \mu E_y - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial y} - \omega_c^2 \tau^2 \frac{E_x}{B} \pm \omega_c^2 \tau^2 \frac{k_B T}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \tag{4.40}$$

Der erste und zweite Term bezeichnen die bekannte Drift und Diffusion. Der dritte Term beschreibt die E × B Drift und der letzte entspricht der diamagnetischen Drift. Formal können wir jetzt den Term $(1 + \omega_c^2 \tau^2)$ auf die rechte Seite bringen und erhalten modifizierte Ausdrücke für die **Diffusion und Drift senkrecht zum Magnetfeld**:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\boxed{\mu_\perp = \frac{\mu_\parallel}{1+\omega_c^2\tau^2}} \tag{4.41}$$

und

$$\boxed{D_\perp = \frac{D_\parallel}{1+\omega_c^2\tau^2}} \tag{4.42}$$

der Term $\frac{1}{1+\omega_c^2\tau^2}$ zeigt, dass die Diffusionskonstante senkrecht zum Magnetfeld gegenüber der Diffusion parallel zum Magnetfeld stark herabgesetzt ist. Setzen wir jetzt näherungsweise den Fall eines starken Magnetfeldes mit $\omega^2\tau^2 \gg 1$ so erhalten wir

$$D_\perp = \frac{k_B T}{m\nu_m}\frac{\nu_m^2}{\omega_c^2} \propto \frac{\nu_m}{B^2} \propto \frac{r_L^2}{\tau_m} \tag{4.43}$$

d.h. der Transport nimmt zu mit steigender Stoßfrequenz. Die Schrittweite hierbei ist entsprechend einem random walk mit Schrittweite Larmor-Radius. Zum Vergleich die klassische Diffusion:

$$D_\parallel = \frac{k_B T}{m\nu_m} \propto \frac{1}{\nu_m} \propto v_{therm}^2\tau_m = \frac{\lambda_m^2}{\tau_m^2}\tau_m = \frac{\lambda_m^2}{\tau_m} \tag{4.44}$$

hier sinkt die Diffusion mit steigender Stoßfrequenz und der Transport entspricht einem Random walk mit einer Schrittweite der freien Weglänge λ_m.

4.3 Transport in voll-ionisierten Plasmen

4.3.1 Stöße zwischen Ladungsträgern

Bislang haben wir immer die Diffusion geladener Teilchen vor einem neutralen Gashintergrund betrachtet. Was ändert sich, wenn wir nur noch Stöße zwischen geladenen Teilchen betrachten, wie es in voll-ionisierten Plasmen der Fall ist. Abb. 4.6 verdeutlicht, dass nur der Transport von *ungleichnamigen* Ladungsträgern zu Netto-Transport führt: (i) stoßen zwei gleichnamige Ladungsträger auf ihrer Gyrationsbahn, so ändern sie in einem elastischen Stoß ihrer Richtung, und beginnen ihre Gyration von Neuem. Bildet man allerdings den Schwerpunkt der beiden Führungszentrum, so ändert sich dieser bei einem Stoßprozeß nicht; (ii) bei ungleichnamigen Ladungsträger ändert sich der Schwerpunkt der beiden Führungszentrum um die Größenordnung einer Larmor-Radius.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

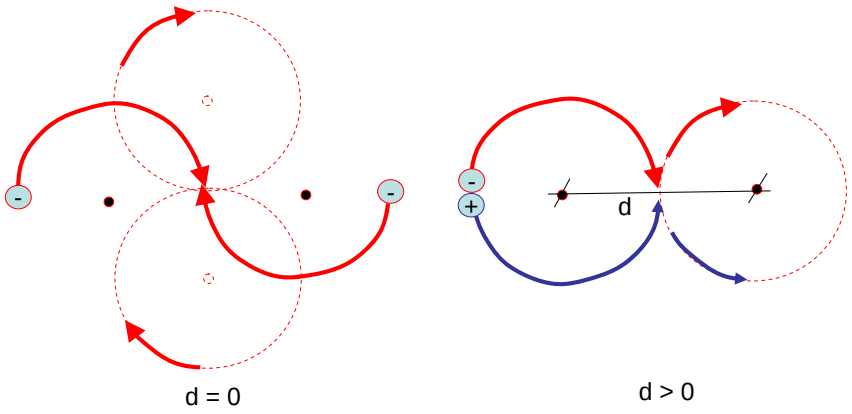


Abbildung 4.6: Nur Stöße zwischen ungleichnamigen Ladungsträgern führen zu Transport

4.3.2 Spezifischer Widerstand bzw. Leitfähigkeit eines Plasmas

Bevor wir den Transport in voll-ionisierten Plasmen betrachten, wollen wir zunächst den Widerstand eines Plasmas bestimmen für den Fall, dass nur noch geladene Teilchen Stoßpartner sind. Der Strom sei getrieben durch ein elektrisches Feld gemäß dem Ohm'schen Gesetz:

$$\vec{j} = \sigma_{cond}\vec{E} = en\mu\vec{E} \tag{4.45}$$

die **Leitfähigkeit** σ_{cond} ergibt sich demnach zu

$$\sigma = \frac{ne^2}{m\nu_m} = \frac{1}{\eta} \tag{4.46}$$

η ist per Definition der **spezifische Widerstand**. Die Stoßfrequenz ist gegeben durch:

$$\nu_m = n\langle\sigma_{coll}v\rangle \tag{4.47}$$

Hierbei ist σ_{coll} der Wirkungsquerschnitt und n die Dichte der Stoßpartner, die in diesem Fall die Ladungsträger selbst sind. Die Gleichungen 4.46 und 4.47 zusammen ergeben:

$$\eta = \frac{m}{ne^2}\nu_m = \frac{m}{ne^2}n\langle\sigma_{coll}v\rangle = \frac{m}{e^2}\langle\sigma_{coll}v\rangle \tag{4.48}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Hier darf jetzt die Dichte gekürzt werden, da die Träger des Stromes als auch die Stoßpartner die gleichen Teilchen sind. Dies ist im Unterschied zur Diffusion über Stöße mit Neutralen. Schließlich wird noch der Wirkungsquerschnitt für den Impulsübertrag durch Kleinwinkelstöße benutzt:

$$\sigma_{90}|_m = \frac{8}{\pi} b_0^2 \ln \Lambda \tag{4.49}$$

b_0 ist der Abstand größter Annäherung ($b_0^2 \sim v^{-4}$). Die Geschwindigkeit wird durch eine Temperatur ausgedrückt und es ergibt sich der **spezifische Widerstand nach Spitzer**:

$$\boxed{\eta \simeq \frac{\pi e^2 m^{1/2}}{(4\pi\epsilon_0)^2 (k_B T_e)^{3/2}} \ln \Lambda} \tag{4.50}$$

Der spezifische Widerstand skaliert wie folgt:

- Der Widerstand hängt nicht von der Ladungsträgerdichte ab, da Ladungsträger gleichzeitig Strom tragen aber auch Stoßpartner sind. D.h. der Strom steigt nicht mit steigender Ladungsträgerdichte. Dies ist im Unterschied zum Stromtransport in teil-ionisierten Plasmen, bei dem der Strom durch Stöße mit dem Neutralgas limitiert ist. Hier wird der Strom mit steigender Elektronendichte größer, wie in Abb. 4.7 skizziert.

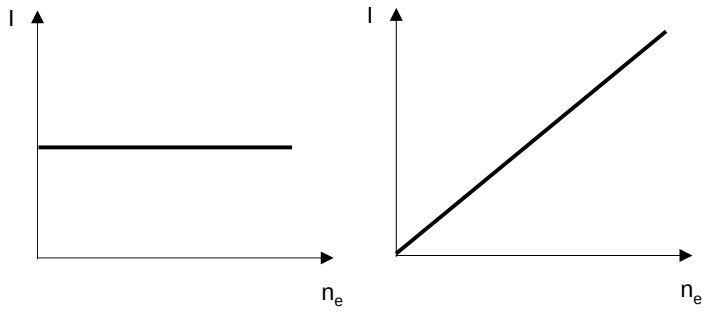


Abbildung 4.7: Abhängigkeit des Stromes von der Elektronendichte in voll- und in teil-ionisierten Plasmen.

- Der spezifische Widerstand skaliert mit v^{-3}. D.h. schnelle Elektronen tragen den Strom. Tritt eine Störung im elektrischen Feld auf, die zu einer Beschleunigung der Teilchen führt, kann es passieren, daß diese

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

nicht mehr durch Reibung abgebremst werden und das Plasma verlassen können. Dies ist ein kinetischer Effekt: eine Abweichung von der Maxwellverteilung der Elektronen im hochenergetischen Bereich der Verteilungsfunktion kann von der Thermalisierung nicht mehr ausgeglichen werden. Diese schnellen Elektronenstrahlen bezeichnet man als *runaway Elektronen*, die relativistische Energien erreichen. Bei diesen hohen Energien werden allerdings Bremsstrahlungsverluste maßgeblich. Diese Bremsstrahlung wird zum Teil in einem Fusionsplasma wieder reabsorbiert und die Abstrahlung der Elektronen geht dem Energieinhalt des Fusionsplasma somit nicht komplett verloren.

- Der spezifische Widerstand skaliert mit $T_e^{-3/2}$, d.h. bei hohen Plasmatemperaturen wird die ohmsche Heizung immer ineffektiver. Aus diesem Grund sind bei heutigen Fusionsexperimenten das Einstrahlen von Wellen bzw. insbesondere das Einstrahlen von hochenergetischen neutralen Teilchen die wichtigsten Heizmethoden.

Die beiden letzten Punkte sind direkte Folge der Eigenschaft des Coulombquerschnittes gerade bei hohen Energien sehr klein zu werden ($\sigma \sim v^{-4}$).

4.3.3 Diffusion senkrecht zum B-Feld, Magnetohydrodynamik

Nach diesen Vorbemerkungen sind wir jetzt in der Lage die Impulsbilanzgleichungen für die Elektronen- und die Ionenflüssigkeit in voll-ionisierten Plasmen aufzustellen. Für Ionen haben wir

$$Mn\frac{\partial v_i}{\partial t} = en(E + v_i \times B) - \nabla p_i + P_{ie} \tag{4.51}$$

der letzte Term beschreibt den Impulsübertrag bei Stößen der Ionen mit Elektronen. Ein Term für Stöße von Ionen mit Ionen tritt nicht auf, da hier ja kein Transport stattfindet! Analog ergibt sich ein Ausdruck für die Impulsbilanz der Elektronen:

$$mn\frac{\partial v_e}{\partial t} = -en(E + v_e \times B) - \nabla p_e + P_{ei} \tag{4.52}$$

Da wir elastische Stöße zwischen Elektronen und Ionen betrachten, muss aus Symmetriegründen gelten:

$$P_{ei} = -P_{ie} \tag{4.53}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Durch diese Symmetrie können wir jetzt neue vereinfachte Gleichungen erzeugen indem wird die Impulsbilanz der Elektronen und der Ionen jeweils addieren bzw. subtrahieren. Durch die Addition von Gl. 4.51 und 4.52 entsteht folgender Ausdruck:

$$n\frac{\partial}{\partial t}(Mv_i + mv_e) = en(v_i - v_e) \times B - \nabla(p_e + p_i) \tag{4.54}$$

Die *elektrische* Stromdichte ist gegeben als:

$$j = en(v_i - v_e) \tag{4.55}$$

d.h. elektrischer Strom tritt nur dann auf, wenn die Geschwindigkeit der Ionen und Elektronen unterschiedlich ist. Ist dies nicht der Fall, so kann zwar das Plasma als Gesamtflüssigkeit strömen, doch findet kein Netto-Transport von Ladungen statt.
der Gesamtdruck als

$$p = p_i + p_e \tag{4.56}$$

und die Schwerpunktsgeschwindigkeit

$$v = \frac{1}{\rho}(n_i M v_i + n_e m v_e) \tag{4.57}$$

mit der Massendichte $\rho = n_i M + n_e m$. Mit dieser Notation ergibt sich folgende Impulsbilanz für die Schwerpunktsgeschwindigkeit der Flüssigkeit:

$$\boxed{\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p} \tag{4.58}$$

Dies bezeichnet man als **Einflüssigkeitsgleichung**. Abb.4.8 veranschaulicht, wie äußere elektrische oder magnetische Felder, die Schwerpunktsgeschwindigkeit bzw. den Ladungs-Transport beeinflussen können:

- *Magnetfeld* Betrachtet man ein Plasma in dem sich die Elektronen und Ionen gleichförmig bewegen. Durch die Lorentzkraft werden positive und negative Ladungsträger in unterschiedliche Richtungen abgelenkt. Dadurch ändert sich die Schwerpunktsgeschwindigkeit.

- *elektrisches Feld* Betrachtet man ein Plasma in dem sich die Elektronen und Ionen gleichförmig bewegen. Durch ein elektrisches Feld wird die Geschwindigkeit der Elektronen z.B. erhöht, die der Ionen aber erniedrigt. Netto ergibt sich dadurch aber keine Änderung der Schwerpunktsgeschwindigkeit.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

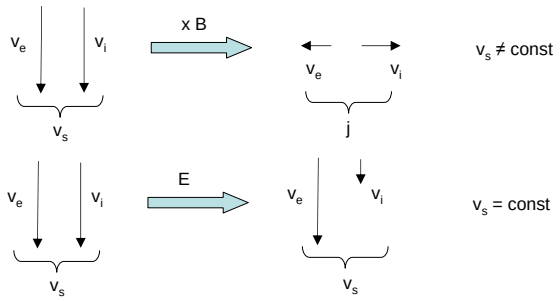


Abbildung 4.8: Veranschaulichung der Einflüssigkeits-Gleichung. Nur durch ein Magnetfeld ändert sich die Schwerpunktsgeschwindigkeit der Flüssigkeit und ein Strom entsteht.

Eine zweite Beziehung der Magnetohydrodynamik (MHD) kann man herleiten, indem man die Differenz zwischen den Gl. 4.51 und 4.52 bildet. Hier wird jeweils Gl. 4.51 mit der Elektronenmasse m und Gl. 4.52 mit der Ionenmasse M multipliziert. Man erhält demnach:

$$\begin{aligned} Mmn\frac{\partial}{\partial t}(v_i - v_e) &= en(M+m)\vec{E} + en(m\vec{v_i} + M\vec{v_e}) \times \vec{B} \\ &\quad -m\nabla p_i + M\nabla p_e - (M+m)P_{ei} \end{aligned} \tag{4.59}$$

Die einzelnen Terme in dieser Gleichung lassen sich weiter vereinfachen. Die Massendichte ist:

$$\rho = n(M+m) \tag{4.60}$$

Der Stoßterm ergibt sich zu

$$P_{ei} = mn(v_i - v_e)\nu_m = mn(v_i - v_e)\frac{ne^2}{m}\eta = e^2n^2(v_i - v_e)\eta = en\eta\vec{j} \tag{4.61}$$

An dieser Stelle ist wichtig anzumerken, dass η selbst eine Konstante und unabhängig von n ist. Der Term $mv_i + Mv_e$ in Gl. 4.59 ergibt:

$$mv_i + Mv_e = Mv_i + mv_e + M(v_e - v_i) + m(v_i - v_e) = \frac{1}{n}\rho v - (M-m)\frac{j}{ne} \tag{4.62}$$

Diese Umformungen setzen wir wieder in Gl. 4.59 ein, teilen durch $(e\rho)$ und erhalten

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\frac{Mmn}{e\rho}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{j}}{en} = \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} - \frac{M-m}{e\rho}\vec{j}\times\vec{B} - \frac{m}{e\rho}\nabla p_i + \frac{M}{e\rho}\nabla p_e - (M+m)en\eta\vec{j}\frac{1}{e\rho} \quad (4.63)$$

Unter Vernachlässigung der Zeitableitung, die hier dem Trägheitsterm entspricht und unter der Voraussetzung das $M \gg m$ ist erhält man das sog. **verallgemeinerte Ohm'sche Gesetz**:

$$\boxed{\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} = \eta\vec{j} + \frac{1}{en}\left(\vec{j}\times\vec{B} - \nabla p_e\right)} \quad (4.64)$$

In der Regel ist der erste Term auf der rechten Seite dominant. Den zweiten Term bezeichnet man als Hallterm. Abb.4.9 beschreibt anschaulich, wie äußere Felder einen Strom im Plasma treiben können.

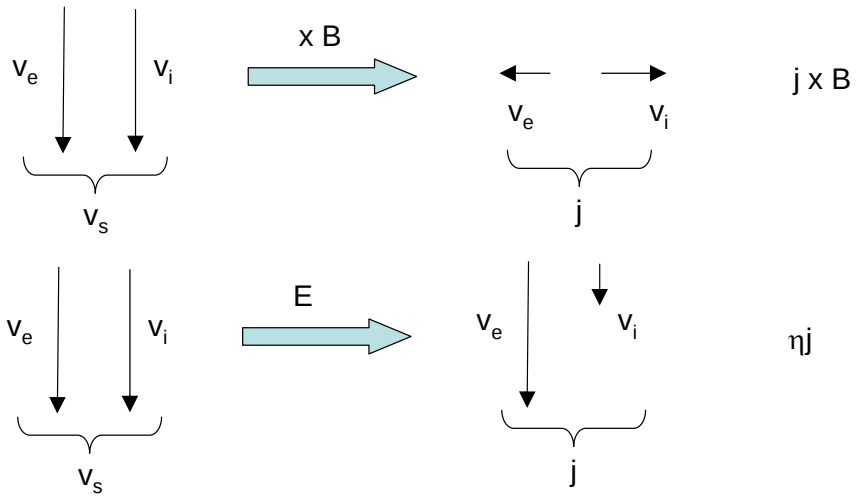


Abbildung 4.9: Veranschaulichung des verallgemeinerten Ohm'schen Gesetzes. Durch ein elektrisches bzw. magnetisches Feld wird ein Stromfluß in dem Plasma erzeugt.

- *elektrisches Feld* Betrachten wir wieder ein Plasma in dem sich die Elektronen und Ionen zunächst gleichförmig bewegen. Durch ein elektrisches Feld wird die Geschwindigkeit der Elektronen z.B. erhöht, die der Ionen aber erniedrigt. Dies entspricht einem Strom, da jetzt der Term $v_i - v_e$ von Null verschieden ist.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

- *Magnetfeld* Durch die Lorentzkraft werden positive und negative Ladungsträger in unterschiedliche Richtungen abgelenkt. Dadurch entsteht ein Strom, der umso stärker ist je größer das Magnetfeld und die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist.

Das System der MHD Gleichungen wird geschlossen durch die Erhaltungsgleichungen für Masse und Ladung. Damit ergibt sich:

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{j}\times\vec{B} - \nabla p \tag{4.65}$$

$$\vec{E} + \vec{v}\times B = \eta\vec{j} + \frac{1}{en}\left(\vec{j}\times\vec{B} - \nabla p_e\right) \tag{4.66}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0 \tag{4.67}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \nabla j = 0 \tag{4.68}$$

in der letzten Gleichung bezeichnet σ die Ladung der Flüssigkeit $\sigma = e(n_e - n_i)$
Auf der Basis der MHD Gleichungen können wir jetzt die Diffusion senkrecht zum Magnetfeld beschreiben. Da wir das gesamte Plasma jetzt als Einflüssigkeitsproblem betrachten, entspricht die Diffusion automatisch dem Transport beider Ladungsträger gemeinsam also einer ambipolaren Diffusion. Die Gleichungen zur Beschreibung des Transportes sind Impulsbilanz 4.58 und Ohm'sches Gesetz 4.64. Wir betrachten den stationären Fall, deshalb fallen die Zeitableitungen weg. Wir erhalten:

$$\vec{j}\times\vec{B} = \nabla p \tag{4.69}$$

$$\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} = \eta\vec{j} \tag{4.70}$$

Der Hallterm und der Druckgradient wurden in Gl. 4.70 gegenüber ηj vernachlässigt. In der Richtung parallel zum Magnetfeld erhalten wir einfach

$$E_\parallel = \eta_\parallel j_\parallel \tag{4.71}$$

In der Richtung senkrecht zu $\vec{B}$ erhalten wir die Geschwindigkeit der Flüssigkeit indem wir das Ohmsche Gesetz 4.64 mit $\times\vec{B}$ multiplizieren:

$$\vec{E}\times\vec{B} + (\vec{v}_\perp\times\vec{B})\times\vec{B} = \eta_\perp(\vec{j}\times\vec{B}) = \eta_\perp\nabla p \tag{4.72}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Das doppelte Kreuzprodukt wird wieder aufgelöst, wobei der Term $\vec{v}_\perp \vec{B}$ zu Null wird, da die Komponenten senkrecht zueinander stehen. D.h. vom doppelten Kreuzprodukt bleibt nur noch ein Term $-\vec{v}_\perp B^2$ übrig. Daraus ergibt sich die Flüssigkeitsgeschwindigkeit senkrecht zum Magnetfeld zu:

$$\vec{v}_\perp = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} - \frac{\eta_\perp}{B^2} \nabla p \tag{4.73}$$

Auch hier enstehen zwei Terme. Der erste Term entspricht der $\vec{E} \times \vec{B}$ Drift und der zweite Term der Diffusion getrieben durch einen Dichtegradienten.

Diffusionsterm

Betrachten wir zunächst den zweiten Term in Gl. , der einer Diffusion entspricht. Ein Gradient im Druck bzw. in der Dichte treibt einen Teilchenfluss Γ an:

$$\Gamma = n\vec{v}_\perp = -\eta_\perp \frac{n(k_B T_i + k_B T_e)}{B^2} \nabla n \tag{4.74}$$

Hierbei wurden isotherme Zustandsänderungen angenommen. Bei einer adiabatischen Zustandsänderung der Ionen bekommt man mit dem Adiabatenkoeffizienten γ:

$$\Gamma = n\vec{v}_\perp = -\eta_\perp \frac{n(\gamma k_B T_i + k_B T_e)}{B^2} \nabla n \tag{4.75}$$

Der Diffusionskoeffizient senkrecht zum Magnetfeld in voll-ionisierten Plasmen ist demnach bei isothermen Änderungen gegeben als:

$$D_\perp = \frac{\eta n}{B^2} \sum_i k_B T_i \tag{4.76}$$

falls der Index i die beteiligte Ladungsträgersorte beschreibt. Im Vergleich mit den Diffusionskoeffizienten für den Transport in teil-ionisierten Plasmen mit

$$D_\perp = \frac{kT}{m\nu_m} \frac{1}{1 + \omega_c^2 \tau_m^2} \tag{4.77}$$

ergibt sich jetzt eine explizite Abhängigkeit von der Ionendichte, da die Ionen hier Stoßpartner sind! Zudem sinkt der Diffusionskoeffizient mit steigender Temperatur in voll-ionisierten Plasmen, da die Temperaturabhängigkeit von η stärker ist als die Temperaturabhängigkeit im Zähler. Auch dies liegt wieder an der starken Geschwindigkeitsabhängigkeit des Coulomb-Querschnitts.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Wegen der expliziten Dichteabhängigkeit des Diffusionskoeffizienten, läßt sich die Diffusionsgleichung nicht mehr so leicht lösen wie im Fall der teil-ionisierten Plasmen. Man bekommt zunächst:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(-D\nabla n) = 0 \tag{4.78}$$

mit einer Diffusionskoeffizienten der von der Dichte n abhängt:

$$D = \frac{\eta}{B^2} n \sum_n K_B T_n = 2nA \tag{4.79}$$

Damit wird die Kontinuitätsgleichung zu

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla(2An\nabla n) = A\nabla^2 n^2 \tag{4.80}$$

Mit einem Separationsansatz gemäß

$$n = T(t)S(x) \tag{4.81}$$

bekommt man

$$\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{A}{S}\nabla^2 S^2 = -\frac{1}{\tau} \tag{4.82}$$

Auch hier müssen beide Seiten eine Konstante ergeben, die wir als -1/τ definieren. Die Zeitabhängigkeit läßt sich noch einfach lösen. Man erhält:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} + \frac{t}{\tau} \tag{4.83}$$

d.h. für sehr große Zeiten t zerfällt das Dichteprofil mit $T \propto 1/t$ und nicht exponentiell, wie beim Transport in teil-ionisierten Plasmen. Die Ortsabhängigkeit läßt sich nicht mehr einfach auflösen.

Driftterm, Bohmdiffusion

Der Diffusionskoeffizient zur Beschreibung des senkrecht Transportes in voll-ionisierten Plasmen sinkt mit steigender Temperatur und steigendem B-Feld zum Quadrat. Dies ist an sich erfreulich, da bei hohen Plasmatemperaturen und hohen Magnetfeldern wie in der Fusion ein guter Einschluss gewährleistet sein sollte. Nach dieser Abschätzung würde man Fusionsbedingungen in kleinen Fusionsexperimenten mit Durchmessern von ca. 1 Meter erwarten. Auf dieser Basis wurden auch viele Experimente in den 50zigern des letzten Jahrhunderts zunächst konzipiert. Im Experiment zeigte sich allerdings, daß zum

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

einen der senkrechte Transport mit der Temperatur zunimmt statt abzunehmen und zum anderen die Abhängigkeit eher mit 1/B als mit $1/B^2$ skaliert. Die Vermutung liegt nahe, daß der Transport senkrecht zum Magnetfeld durch den ersten Driftterm in Gl. 4.3.3 gegeben ist. Die Abhängigkeit von Temperatur und Magnetfeld wurde jedoch zunächst empirisch durch die **Bohmdiffusion** beschrieben mit

$$D_\perp = \frac{1}{16}\frac{k_B T}{eB} = D_{\text{Bohm}} \tag{4.84}$$

Der Driftterm in Gl. 4.3.3 ist:

$$\vec{v}_\perp = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2} \tag{4.85}$$

Doch woher kommt das elektrische Feld? Dies kann durch Störungen im Plasmagleichgewicht, Plasmawellen und Instabilitäten entstehen. Eine Störung in der Quasineutralität erzeugt dabei automatisch ein elektrisches Feld.
Eine solche Störung erzeuge eine Änderung der lokalen Teilchendichte um δn und damit einen Teilchenfluss gemäß:

$$\delta\Gamma_\perp = \delta n\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2} \propto \delta n\frac{E}{B} \tag{4.86}$$

Das elektrische Feld kann durch eine Verschiebung der Elektronen über eine charakteristische Länge R entstehen, analog zur Debye Abschirmung. Die potentielle Energie, die dieser Verschiebung entspricht und die thermische Energie müssen gleich sein $e\Phi = k_B T_e$. Deshalb gilt:

$$E = \frac{\Phi}{R} \simeq \frac{k_B T_e}{eR} \tag{4.87}$$

Damit ergibt sich folgender Ausdruck für den Teilchenfluss, der durch diese Störung getrieben wird:

$$\Gamma_\perp = \frac{\delta n}{R}\frac{k_B T_e}{eB} \simeq \frac{k_B T}{eB}\nabla n \tag{4.88}$$

Bis auf den empirischen Faktor 1/16 entspricht dies genau der Skalierung der Bohm Diffusion. D.h. demnach können alle Prozesse, die zu elektrischen Feldern im Plasma führen, dominant zum senkrechten Transport beitragen.
Der Transport senkrecht zum Magnetfeld kann insbesondere in torodialen Anordnungen einige Besonderheiten aufweisen. Durch eine Verscherung der Feldlinien sieht ein Teilchen auf seiner Trajektorie abwechselnd hohe und niedrige B-Felder. Falls seine parallele Geschwindigkeit zu klein ist, kann

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

es wie in einer Spiegelmaschine gefangen sein und zwischen zwei Umkehrpunkten pendeln. Dieser Pendelbewegung muß noch die Krümmungsdrift senkrecht zur Magnetfeldrichtung überlagert werden. Dies führt zu einer Teilchenbahn, die auf den Querschnitt des Torus projiziert, eine Bananen-förmige Kontur besitzt.

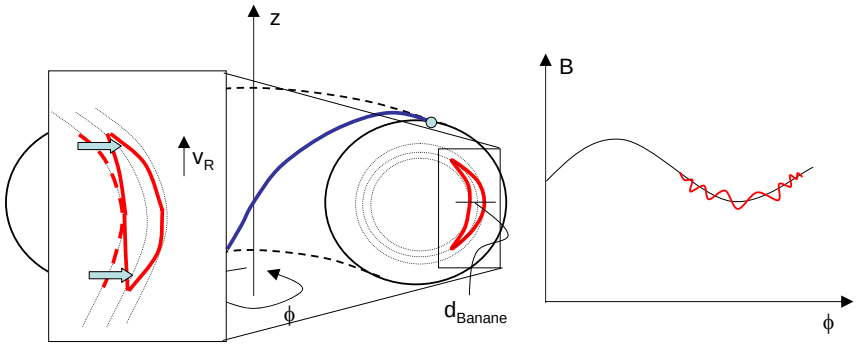


Abbildung 4.10: In torodialen Plasmen bei denen das Magnetfeld verschert ist, können Teilchen in Spiegelfeldern gefangen werden. Durch die Krümmungsdrift, bleiben sie nicht auf einer magnetischen Fläche sondern pendeln zudem zwischen benachbarten magnetischen Flächen. Dieser Kurzschluss senkrecht zum Magnetfeld wird als neoklassischer Transport bezeichent.

Auf dieser Kontur-Bahn, läuft ein Teilchen vom Zentrum zum Rand der Entladung und zurück. D.h. die Schrittweite für den senkrecht Transport ist jetzt eher die Breite dieser Bananenbahn. Man bezeichnet dies als **neoklassischen Transport**. Wird die Stossfrequenz sehr groß, so ist die freie Weglänge sehr klein und die Teilchen können keinen kompletten Umlauf in einer Spiegelanordnung durchlaufen. Der senkrecht Transport hat jetzt wieder die Schrittweite Larmor-Radius.

4.4 Zeitabhängige Effekte der MHD

Auf der Basis der MHD Gleichungen kann man auch den Fall diskutieren, wie ein magnetisiertes Plasma auf zeitliche Änderung des Feldes bzw. der Plasmalage reagiert. Wir beginnen wieder mit dem Ohm'schen Gesetz:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j} \tag{4.89}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

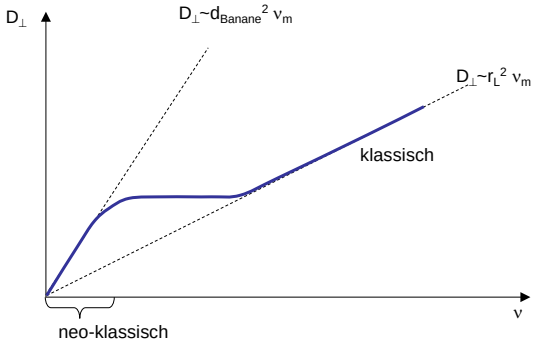


Abbildung 4.11: Der neo-klassische Transport wird insbesondere bei kleinen Stoßfrequenzen sichtbar.

in Verbindung mit dem Ampere'schen Gesetz (unter Vernachlässigung des Verschiebungsstromes):

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{4.90}$$

erhält man

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \tag{4.91}$$

Jetzt werden beide Seiten von links mit $\nabla\times$ multipliziert und man erhält:

$$\nabla \times \vec{E} + \nabla \times \vec{v} \times \vec{B} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) \tag{4.92}$$

Daraus wird mit $\nabla \times E = -\dot{B}$ und $\nabla B = 0$:

$$\boxed{-\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times \vec{v} \times \vec{B} = \frac{\eta}{\mu_0}(-\nabla^2 B)} \tag{4.93}$$

Zwei Fälle können betrachtet werden. Zum einen der Fall der ruhenden Flüssigkeit ($v = 0$) und zum anderen der unendlichen Leitfähigkeit ($\eta = 0$).

4.4.1 Diffusion des Magnetfeldes

Wir nehmen zunächst an, dass das Plasma ruhen soll und dementsprechend $v = 0$ gilt. Wir erhalten damit:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 B \tag{4.94}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Dies ist eine Diffusionsgleichung für das Magnetfeld und beschreibt das Eindringen des Magnetfeldes in ein Plasma, wie in Abb. 4.12 illustriert. Diese Gleichung wird linearisiert und beschreibt den Abfall des Magnetfeldes über eine charakteristische Länge l im Plasma. Man erhält:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} B \frac{1}{l^2} \tag{4.95}$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$B = B_0 e^{-t/\tau} \tag{4.96}$$

mit

$$\tau = \frac{\mu_0 l^2}{\eta} \tag{4.97}$$

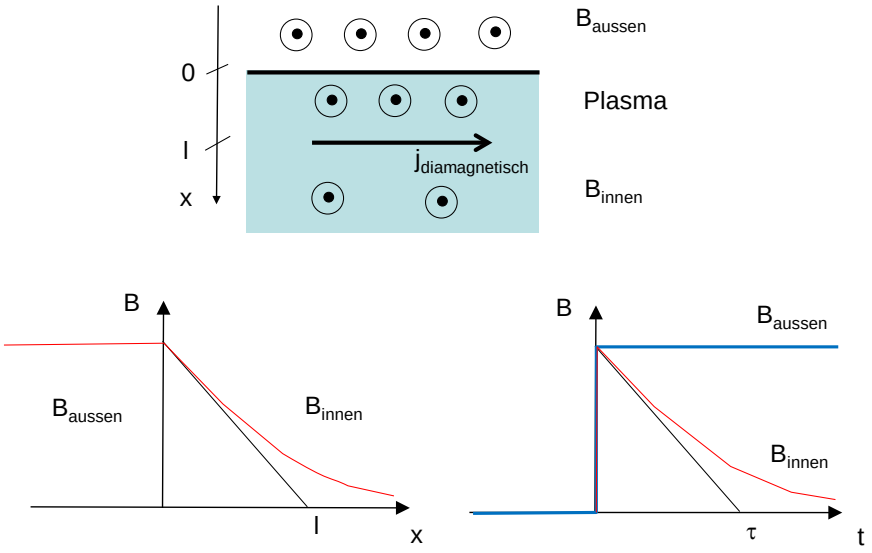


Abbildung 4.12: Diffusion des Magnetfeldes in ein Plasma.

D.h. das Magnetfeld dringt in das Plasma ein und über das Antreiben von dissipativen Strömen ($\eta \neq 0$) wird Magnetfeldenergie in thermische Energie umgewandelt. Dieser Übergang von Magnetfeldenergie in Wärme kann man aus der dissipierten Ohm'schen Leistung P ableiten:

$$P = \eta j^2 \tag{4.98}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

mit $\mu_0 \vec{j} = \nabla \times \vec{B} = \frac{B}{l}$ und $\tau = \frac{\mu_0 l^2}{\eta}$ ergibt sich die dissipierte Energie $\Delta E = P\tau$ zu:

$$\Delta E = \eta j^2 \tau = \eta \left(\frac{B}{\mu_0 l}\right)^2 \left(\frac{\mu_0 l^2}{\eta}\right) = \frac{B^2}{\mu_0} \tag{4.99}$$

Man erkennt, daß die dissipierte Energie genaue der Magnetfeldenergie $\frac{B^2}{\mu_0}$ entspricht.

4.4.2 Eingefrorener Fluss

In der sogenannten **idealen MHD** geht man von einer unendlichen Leitfähigkeit des Plasmas aus. Jetzt ist $\eta = 0$, aber $\vec{v}$ sei beliebig.

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \tag{4.100}$$

damit ergibt sich

$$\frac{\partial B}{\partial t} = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{v} + \vec{v}(\nabla \cdot \vec{B}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{B} - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{v}) \tag{4.101}$$

$$= (\vec{B}\nabla)\vec{v} - \vec{B}(\nabla \vec{v}) \tag{4.102}$$

Hierbei fällt der Term $\vec{v}(\nabla \vec{B})$ wegen $divB = 0$. Der Term $(\vec{v}\nabla)\vec{B}$ verschwindet, da die Änderung in B senkrecht auf $\vec{v}$ steht. Mit der Kontinuitätsgleichung für die Massendichte des strömenden Plasmas.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{v} \rho = 0 \tag{4.103}$$

Auch hier läßt sich der Term zur Änderung in der Dichte $\vec{v}\nabla\rho$ gegen Null annähern. Dies eingesetzt für den Term $\nabla\vec{v}$ ergibt demnach

$$\frac{\partial B}{\partial t} = (\vec{B}\nabla)\vec{v} + \vec{B}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{4.104}$$

mit der Beziehung

$$\frac{d}{dt}\frac{B}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{1}{\rho^2} B \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{4.105}$$

ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{B}{\rho}\right) = \left(\frac{\vec{B}}{\rho}\nabla\right)\vec{v} \tag{4.106}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Da die Plasmaströmung in der Regel an die Magnetfeldlinien gebunden ist, ist die rechte Seite sehr klein bzw. wird zu Null. Damit wird das Verhältnis aus Magnetfeld und Massendichte des Plasmas konstant. Dies bezeichnet man als **eingefrorenen Fluß**. D.h. bewegt sich das Plasma wird das Magnetfeld mit getragen und umgekehrt.

$$\boxed{\frac{\vec{B}}{\rho} = \text{const.}} \tag{4.107}$$

Das Phänomen des eingefrorene Flusses kann das Vorhandensein von Magnetfeldern im interstellaren Raum erklären: bei Supernova-Explosionen trägt das ausgestoßene Plasma das Magnetfeld des Sterns mit sich hinaus in den interstellaren Raum.

4.5 Gleichgewichte und Instabilitäten

4.5.1 Stabilität einer zylindrischen Plasmasäule

Betrachtet man eine zylindrische Plasmasäule in einem Magnetfeld gelten im Gleichgewicht die folgenden Gleichungen aus der MHD:

$$\vec{j} \times \vec{B} = \nabla p \tag{4.108}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{4.109}$$

daraus folgt:

$$\vec{j}_\perp = -\frac{\nabla p \times \vec{B}}{B^2} \tag{4.110}$$

daneben gilt noch das verallgemeinerte Ohm'sche Gesetz.

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta_\perp \vec{j}_\perp + \eta_\parallel \vec{j}_\parallel \tag{4.111}$$

daraus ergibt sich für die Geschwindigkeit (siehe Abb.4.13) senkrecht zur Achse:

$$v_\perp = \underbrace{\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}}_{\text{schnürt das Plasma zusammen}} - \underbrace{\frac{\eta_\perp}{B^2} \nabla p}_{\text{treibt Plasma auseinander}} \tag{4.112}$$

Im Gleichgewcht kann man $v_\perp = 0$ setzen. Diese Gleichgewichte werden ausgenutzt, um ein Plasma zu komprimieren in den sogenannten **Pinch-Entladungen** (Abb. 4.14). Durch zeitveränderliche Magnetfelder wird ein

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

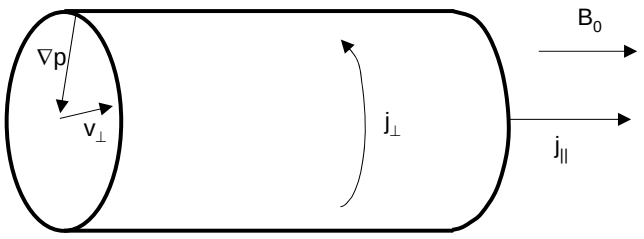


Abbildung 4.13: Zylindrische Plasmasäule

diamagnetischer Strom induziert, der zu einer Zusammen-Schnürung des Plasmas führt. Bei dem Θ-Pinch ist dies ein Ringstrom senkrecht zum Magnetfeld. Beim z-Pinch ist der Strom ein axialer Strom. Die Kompression des Plasmas wird in der Regel durch einen hohen Strompuls ausgelöst. Ist die resultierende Variation im Magnetfeld schneller als die Eindringzeit dieses erhöhten Magnetfeldes in das Plasma, so schnüren die diamagnetischen Ströme das Plasma ein.

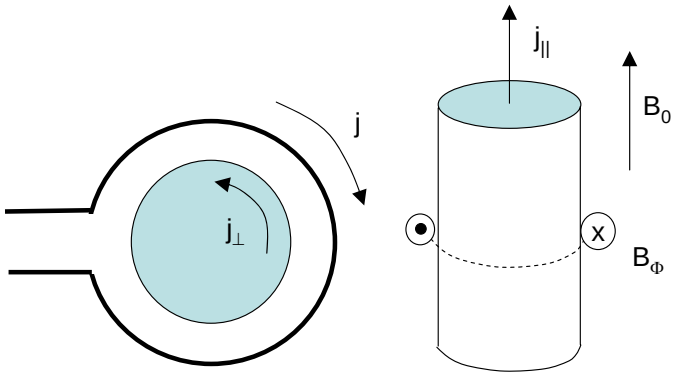


Abbildung 4.14: Θ-Pinch, z-Pinch

Das Gleichgewicht der Plasmasäule ist instabil gegenüber deren Auslenkung bei Einschnürung. Steigt das Magnetfeld lokal, erhöht dies den $\vec{j} \times \vec{B}$-Term. Eine Druckerhöhung kann dies nicht kompensieren, da sich parallel zur Plasmasäule der Druck schnell ausgleicht (das Plasma als inkompressible Flüssigkeit). Eine sog. **Würstchen-Instabilität** entsteht (Abb. 4.15). Tritt

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

ein Knick auf, so erhöht sich auf einer Seite das Magnetfeld, während es sich auf der anderen Seite erniedrigt. So gewinnt einmal der $\vec{j} \times \vec{B}$ Term, während auf der gegenüberliegenden Seite der ∇p Term dominiert (Abb. 4.15).

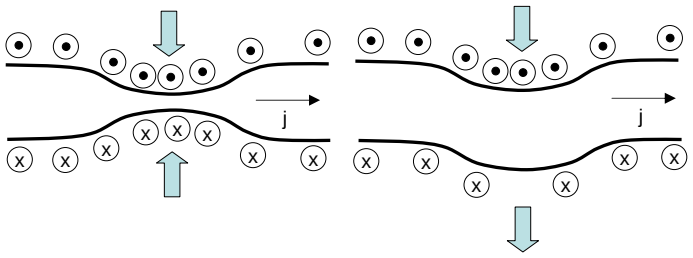


Abbildung 4.15: Würstchen- und Knick-Instabilität

Der Knick-Instabilität wirkt die Feldlinienspannung entgegen. Eine Auslenkung einer Plasmasäule erhöht die magnetische Feldenergie, da das magnetisierte Volumen größer wird.

4.5.2 Instabilitäten

Im folgenden wollen wir Instabilitäten betrachten. Wie oben schon diskutiert, beobachtet man bei Senkrecht-Diffusion in magnetisierten Plasmen eine andere Abhängigkeit als man es klassisch erwarten würde. Eine Erklärungsmöglichkeit kann eine $\vec{E} \times \vec{B}$ getriebene Diffusion sein, die Bohm-Diffusion. Die notwendigen elektrischen Felder können durch Instabilitäten entstehen, die im folgenden behandelt werden.
Der prinzipielle Ansatz zur Beschreibung von Instabilitäten ist zunächst wieder die Impulsbilanz, die in kleine Störungen in Dichte und Geschwindigkeit entwickelt wird. Mit einem Fourier-Ansatz erhält man eine Dispersions-Relation. Falls ω imaginär werden kann, hängt es vom Vorzeichen ab ob diese Störung gedämpft wird oder ob sie zu einer Instabilität anwächst.

Rayleigh-Taylor Instabilität

Bei der Rayleigh-Taylor Instabilität betrachten wir einen Plasmarand in einem Schwerefeld gemäß Abb.4.16
In dem Plasma tritt eine Strömung auf, gemäß der Gravitationsdrift mit:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

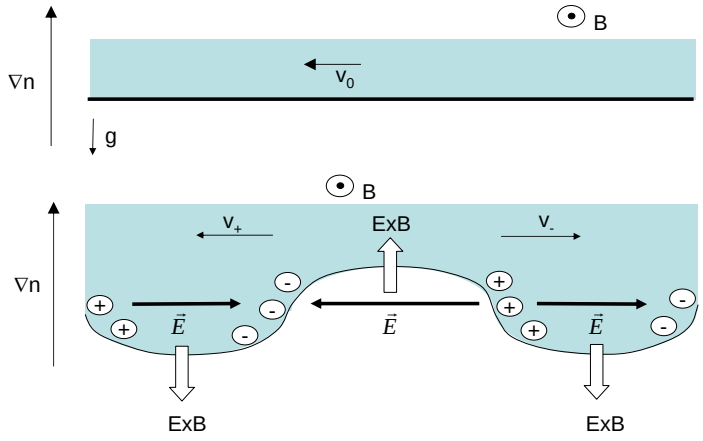


Abbildung 4.16: Rayleigh-Taylor Instabilität

$$v_0 = \frac{m\vec{g} \times \vec{B}}{|q|B^2} \tag{4.113}$$

Die Impulsbilanz der Ionen für $T_e = T_i = 0$ ist

$$Mn\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\nabla\vec{v}\right] = en(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + Mn\vec{g} \tag{4.114}$$

die Geschwindigkeit und Dichte wird entwickelt mit $v = v_0 + v_1$ und $n = n_0 + n_1$. Im Gleichgewicht ohne Störung erhält man:

$$Mn_0\left[\vec{v_0}\nabla\vec{v_0}\right] = en_0(\vec{v_0} \times \vec{B}) + Mn_0\vec{g} \tag{4.115}$$

im Gleichgewicht ist kein elektrisches Feld vorhanden. Tritt nun eine Störung des Plasmarandes auf, so tritt ein elektrisches Feld auf gemäß Abb. 4.16. Wegen der Trägheit der Ionen wird die Ladungsverteilung durch die Elektronen nicht schnell genug kompensiert. Die Störung läßt sich schreiben als:

$$\begin{aligned} M(n_0 + n_1)\left[\frac{\partial(\vec{v}_0 + \vec{v}_1)}{\partial t} + (\vec{v}_0 + \vec{v}_1)\nabla(\vec{v}_0 + \vec{v}_1)\right] \quad = \\ e(n_0 + n_1)(E_1 + (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) \times \vec{B}_0) + M(n_0 + n_1)\vec{g} \end{aligned} \tag{4.116}$$

Man multipliziert die Gleichung 4.115 mit $1 + n_1/n_0$ und subtrahiert sie von 4.116 und erhält für die linke Seite:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

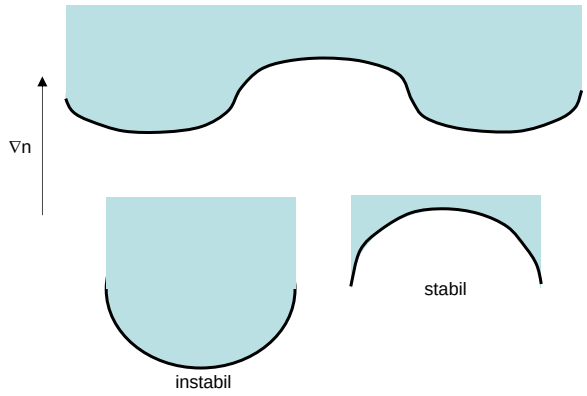


Abbildung 4.17: Rayleigh-Taylor Instabilität entsteht wenn der Dichtegradienten und eine zusätzliche Kraft entgegen gesetzt gerichtet sind.

$$M(n_0+n_1)\left[\frac{\partial(\vec{v}_0+\vec{v}_1)}{\partial t}+\vec{v}_0\nabla(\vec{v}_0+\vec{v}_1)+\vec{v}_1\nabla(\vec{v}_0+\vec{v}_1)\right]= \tag{4.117}$$

Hier kann man jeweils $n_0+n_1 \simeq n_0$, $\vec{v}_1\nabla\vec{v}_1 \simeq n_0$, sowie $\nabla v_0 = 0$ setzen und bekommt insgesamt:

$$Mn_0\left[\frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t}+\vec{v}_0\nabla v_1\right] = en_0(\vec{E}_1+\vec{v}_1\times\vec{B}_0) \tag{4.118}$$

In dieser Formulierung ist jetzt $\vec{g}$ verschwunden. Es gilt aber zu beachten, daß die Geschwindigkeit $\vec{v}_0$ immer noch eine Funktion von $\vec{g}$. Im Fourier-Raum ergibt sich:

$$M(\omega-\vec{k}\vec{v}_0)\vec{v}_1 = ie(\vec{E}_1+\vec{v}_1\times\vec{B}_0) \tag{4.119}$$

in der y-Richtung erhält man:

$$M(\omega-\vec{k}\vec{v}_0)v_{1,y} = ie(E_{1,y}-v_{1x}B_z) \tag{4.120}$$

in x-Richtung

$$M(\omega-kv_0)v_{1,x} = iev_{1,y}B_z \tag{4.121}$$

damit ergibt sich:

$$M(\omega-kv_0)v_{1,x} = ieB_z\frac{ie\,(E_y-v_{1,x}B_z)}{M(\omega-kv_0)} \tag{4.122}$$

Dies läßt sich auflösen zu:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$M^2 \frac{(\omega - kv_0)^2}{e^2 B^2} v_{1,x} = -\frac{E_y}{B_z} + v_{1,x} \tag{4.123}$$

mit $\Omega_c = \frac{eB}{M}$ und $\Omega_c^2 \gg (\omega - kv_0)^2$ ergibt sich die Näherung:

$$v_{1,x} = \frac{E_y}{B_z} \tag{4.124}$$

$$v_{1,y} = -i \frac{\omega - kv_0}{\Omega_c} \frac{E_y}{B_z} \tag{4.125}$$

v_x entspricht der $E \times B$ Drift und v_y entspricht der Polarisationsdrift im oszillierenden Feld. Für die Elektronen erhält man:

$$v_{1x,e} = \frac{E_y}{B_z} \tag{4.126}$$

$$v_{1y,e} = 0 \tag{4.127}$$

Auch die Kontinuitätsgleichung läßt sich in die Störung entwickeln und man bekommt:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla(n_0 + n_1)(v_0 + v_1) = 0 \tag{4.128}$$

dies ergibt:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla(v_0 n_0) + (v_0 \nabla n_1) + n_1 \nabla v_0 + (v_1 \nabla) n_0 + n_0 \nabla v_1 + \nabla(n_1 v_1) = 0 \tag{4.129}$$

Unter der Näherung, daß für Terme höherer Ordnung $n_1 v_1 \ll n_1 v_0 \ll n_0 v_0$, $\nabla v_0 = 0$ und $\nabla n_0 \perp v_0$ gilt, erhält man:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + (v_0 \nabla n_1) + (v_1 \nabla) n_0 + n_0 \nabla v_1 = 0 \tag{4.130}$$

bzw. im Fourier-Raum gilt für die Ionen

$$-i\omega n_{1,i} + ikv_0 n_{1,i} + v_{x,i} \frac{\partial n_0}{\partial x} + ikn_0 v_{y,i} = 0 \tag{4.131}$$

bei den Elektronen ist die Gravitations-Drift sehr klein und damit $v_{0,e} = 0$

$$-i\omega n_{1,e} + v_{x,e} \frac{\partial n_0}{\partial x} = 0 \tag{4.132}$$

setzt man jetzt die Geschwindigkeiten in die Kontinuitätsgleichungen ein so erhält man für die Ionen:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$(\omega - kv_0)n_{1,i} + i\frac{E_y}{B}\frac{\partial n_0}{\partial x} + ikn_0\frac{\omega - kv_0}{\Omega_c}\frac{E_y}{B} = 0 \tag{4.133}$$

und für die Elektronen:

$$\omega n_{1,e} + i\frac{E_y}{B}\frac{\partial n_0}{\partial x} = 0 \tag{4.134}$$

mit $n_{1,e} = n_{1,i}$ bekommt man schließlich

$$(\omega - kv_0)n_1 - \omega n_1 - kn_0\frac{\omega - kv_0}{\Omega_c}\omega\frac{n_1}{\frac{\partial n}{\partial x}} = 0 \tag{4.135}$$

mit dem Ausdruck für v_0

$$v_0 = \frac{M}{e}\frac{\vec{g}\times\vec{B}}{B^2} = -\frac{g}{\Omega_c}\hat{y} \tag{4.136}$$

damit bekommt man folgende Dispersion:

$$\omega^2 - kv_0\omega - g\frac{1}{n_0}\frac{\partial n_0}{\partial x} = 0 \tag{4.137}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in ω. Die Lösung kann imaginär werden wenn:

$$-\vec{g}\frac{1}{n_0}\frac{\partial n_0}{\partial x} > \frac{1}{4}k^2v_0^2 \tag{4.138}$$

d.h. diese Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn die Richtungen von $\vec{g}$ und $\frac{\partial n}{\partial x}$ unterschiedlich sind. $kv_0 = \omega$ entspricht der Grundfrequenz der Welle bei kleinem Dichtegradienten. D.h. die obige Ungleichung wird dann gut erfüllt wenn diese Frequenz sehr klein ist. Damit ist die Rayleigh-Taylor Instabilität bei niederfrequenten Anregungen dominant. Dies ist konsistent mit der Polarisationsdrift, die auch nur bei langsam veränderlichen Feldern dominant wird.
Diese Instabilität hat eine große Bedeutung für die Optimierung eines torusförmigen Plasmas. Durch eine Verschraubung der Feldlinien wird das Plasma immer wieder auf die Innenseite des Torus geführt, um die $E \times B$-Drift zu kompensieren (siehe Kap. 2). An der Außenseite des Torus zeigen die Zentrifugalkraft und der Dichtegradient in entgegengesetzte Richtungen. Damit ist dieser Bereich anfällig für eine Rayleigh-Taylor-Instabilität. Bei einer geringen Verschraubung der Feldlinien (kleine Rotationstransformation q, siehe Kap. 9) bewegen sich Teilchen auf ihrer Magnetfeldlinie eine längere Zeit auf der Außenseite. D.h. eine entsprechende Störung dieser Trajektorien hat eine lange Wellenlänge und ist niederfrequent. Dies sind Voraussetzungen für das

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Entstehen einer Rayleigh-Taylor-Instabilität. Diese kann man unterdrücken indem man eine größere Verschraubung der Feldlinien wählt und so die Wellenlänge einer möglichen Instabilität kurz hält. Dies erschwert die Bildung der Instabilität. Somit ergibt sich eine natürliche Untergrenze für die Verschraubung (bzw. Rotationstransformation q) unterhalb derer ein Fusionsplasma instabil wird.

Driftwellen

Eine weiter wichtige Instabilität, die den Energieeinschluß und Teilcheneinschluß in einem Fusionsplasma begrenzt ist die Driftwellen-Instabilität. Betrachten wir eine zylindrische Plasmasäule in z-Richtung. Im Gleichgewicht ist die Kontur konstanter Dichte (Isobare) symmetrisch zur Zylinderachse. Jetzt sei diese Kontur gestört wobei sich eine Dichteschwankung um den Umfang der Säule ergibt die gegenüber der Längsachse verdrillt ist wie in Abb. 4.18 skizziert ("verdrillte griechische Säule").

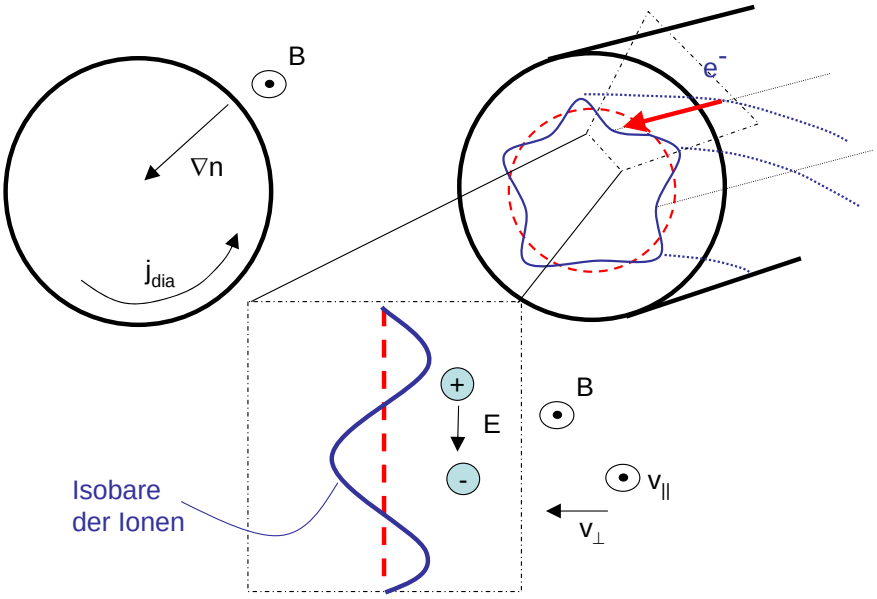


Abbildung 4.18: Driftwellen-Instabilität

Dies hat fundamentale Konsequenzen für die Ausbildung der Instabilität. Die Elektronen können die Dichteschwankung *entlang des Magnetfeldes* schnell auszugleichen: die Bewegung der Elektronen entlang des axialen Magnetfeldes erfolgt schnell, da sie durch einen Gradienten in der Dichte getrieben

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

werden. Diese Diffusion zu Regionen geringerer Dichte erfolgt ambipolar, da die Ionen der Elektronenbewegung nachfolgen. Betrachtet man die Isobaren der Elektronen und Ionen, so ergibt sich eine Dichtestörung *nur* in der Ionendichte um den Umfang, während die Elektronen per Diffusion diese Dichtestörung ausgleichen. Die Isobare der Elektronen bleibt zylindersymmetrisch. Betrachtet man jetzt einen Querschnitt des Torus, so erkennt man Regionen mit einem positiven und einem negativen Ladungsträgerüberschuß, wie in Abb.4.18 illustriert.
Die Bewegungsgleichung der Ionen entlang der Achse der Plasmasäule entsprcht der ambipolaren Diffusion. Dies läßt sich schreiben als:

$$Mn_0\frac{\partial v_\parallel}{\partial t} = -\nabla p \tag{4.139}$$

Im Fourier-Raum ergibt sich:

$$-Mn_0 i\omega v_\parallel = -\nabla p = -ik_\parallel n_1 k_B T_e \tag{4.140}$$

Der Druck wurde hier durch den Elektronendruck ausgedrückt, da die Elektronen dem Gradienten folgen und durch das entstehende elektrische Feld die Ionen nachziehen, entsprechend der ambipolaren Diffusion. Daraus folgt

$$v_\parallel = \underbrace{\frac{k_B T_e}{M}}_{c_s^2} k_\parallel \frac{n_1}{n_0}\frac{1}{\omega} \tag{4.141}$$

Mit c_s der Ionen Schallgeschwindigkeit. Senkrecht zum äußeren Magnetfeld wirkt die $E \times B$ Kraft gemäß:

$$Mn\frac{\partial v_\perp}{\partial t} = en(\vec{E} + \vec{v}_\perp \times \vec{B}) \tag{4.142}$$

die Zeitableitung ist ein kleiner Term hier, da nur die Geschwindigkeit parallel zum Magnetfeld sich stark ändert.

$$v_\perp = \frac{E_y}{B} = -ik_\perp \frac{\Phi_1}{B} \tag{4.143}$$

Die Störung im Potential wird diesmal durch die Boltzmann-Beziehung beschrieben, da sich Dichtegradient und Potential entlang des Magnetfeldes ausgleichen. Man erhält:

$$n = n_0 + n_1 = n_0 exp\left[\frac{e\Phi_1}{k_B T_e}\right] \tag{4.144}$$

entwickelt für kleine Störungen bekommt man:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{e\Phi_1}{k_B T_e} \tag{4.145}$$

damit wird

$$v_\perp = -ik_\perp \frac{n_1}{n_0} \frac{k_B T_e}{eB} \tag{4.146}$$

mit der Kontinuitätsgleichung ergibt sich

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(v_\perp + v_\parallel)n = 0 \tag{4.147}$$

im Fourier-Raum ergibt das:

$$-i\omega n_1 + v_\perp \nabla n + v_\parallel i k_\parallel n_0 = 0 \tag{4.148}$$

jetzt lassen sich die Geschwindigkeiten einsetzen zu:

$$-\omega n_1 - k_\perp \frac{n_1}{n_0} \frac{k_B T_e}{eB} \nabla n + k_\parallel^2 c_s^2 n_0 \frac{n_1}{n_0} \frac{1}{\omega} = 0 \tag{4.149}$$

mit $v_{dia} = -\frac{1}{n_0}\frac{k_B T_e}{eB}\nabla n$ der diamagnetischen Driftgeschwindigkeit ergibt sich:

$$\omega^2 - k_\perp v_{dia}\omega - k_\parallel^2 c_s^2 = 0 \tag{4.150}$$

diese quadratische Gleichung hat zwei reelle Lösungen. D.h. eine Dämpfung bzw. Instabilität kann nur auftreten, wenn einer der Faktoren imaginär wird. Dies geschieht, wenn man eine endliche Leitfähigkeit voraussetzt, so daß eine Änderung im Potential von den Elektronen nicht instantan ausgeglichen wird. Dies kann man ausdrücken in dem man der Boltzmann-Beziehung eine Phasenlage zuschreibt gemäß:

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{e\Phi}{k_B T_e}(1 - i\Delta) \tag{4.151}$$

damit wir die diamagnetische Driftgeschwindigkeit formal eine imaginäre Zahl und damit auch die Lösung für ω imaginär. Dies bezeichnet man als **resistive Driftwellen-Instabilität**.
Bei der Rayleigh-Taylor Instabilität gab es direkt imaginäre Lösungen für ω, deshalb bezeichnet man dies als *reaktive* Instabilität. Bei der Driftwellen-Instabilität muß ein Koeffizient imaginär werden. Dies bezeichnet man als *dissipative* Instabilität.
Die Driftwellen-Instabilität wächst stark an gemäß dem Faktor

$$\frac{k_B T_e}{n_0 eB}\nabla n \tag{4.152}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

d.h. wird z.B. der Dichtegradient zu groß so wird das Plasma instabil. Dieser Prozess legt somit einen maximalen Gradienten fest bei dem noch ein stabiles Plasma aufrecht erhalten werden kann. Wegen dieser endlichen Gradienten müssen Fusionsreaktoren hinreichend groß sein, um bei gegebener Zentraldichte und Temperatur Fusionsbedingungen zu garantieren.
Die Bedingung eines maximalen Gradienten in der Dichte bedeutet allerdings auch, daß eine Verbesserung des Fusionsplasmas am Rand, (z.B. höhere Plasmadichte) automatisch auch eine Erhöhung der Dichte im Zentrum des Fusionsplasmas zur Folge hat. Diese Verbesserung des Randplasmas kann man durch besondere Wandmaterialien bzw. durch spezielle Heizmethoden erreichen.
In den letzten Jahren gelang es zudem, durch besondere Heizmethoden, Transportbarrieren im Plasma zu erzeugen. Diese Unstetigkeiten in dem Dichtegradienten verbessern den Plasmaeinschluss signifikant. Man bezeichnet diese als **interne Transportbarrieren (ITB)**.

Plasma-Strahl Instabilität

Bei der Plasma-Strahl Instabilität betrachtet man einen Elektronen-Strahl, der in ein Plasma eindringt. Die Ionen werden als ruhend betrachtet, während die Elektronen eine Geschwindigkeit v_0 haben sollen, wie in Abb. 4.19 skizziert:

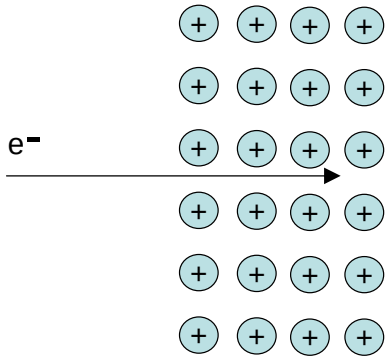


Abbildung 4.19: Plasma-Strahl Instabilität

Für die ruhenden Ionen schreiben wir wieder die Impulsbilanz für die gestörten Größen:

$$Mn_0 \frac{\partial v_{1,i}}{\partial t} = en_0 E_1 \tag{4.153}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Für die Elektronen gilt:

$$mn_0 \left[\frac{\partial v_{1,e}}{\partial t} + v_0 \nabla v_{1,e} \right] = -en_0 E_1 \tag{4.154}$$

Diese Impulsbilanzen im Fourier-Raum ergeben damit:

$$-i\omega M n_0 v_{1,i} = en_0 E_1 \tag{4.155}$$

$$mn_0(-i\omega + ikv_0)v_{1,e} = -en_0 E_1 \tag{4.156}$$

aus der Kontinuitätsgleichung der Ionen ergibt sich

$$\frac{\partial n_{1,i}}{\partial t} + n_0 \nabla v_{1,i} = 0 \tag{4.157}$$

im Fourier-Raum zu

$$-i\omega n_{i,1} = -ikn_0 v_{1,i} \tag{4.158}$$

damit wird:

$$n_{1,i} = \frac{ien_0 k}{M\omega^2} E_1 \tag{4.159}$$

aus der Kontinuitätsgleichung der Elektronen

$$\frac{\partial n_{1,e}}{\partial t} + v_0 \nabla n_{1,e} + n_0 \nabla v_{1,e} = 0 \tag{4.160}$$

ergibt sich im Fourier-Raum zu

$$n_{1,e} = -\frac{ien_0 k}{m(\omega - kv_0)^2} E_1 \tag{4.161}$$

dies entspricht der Störung der Ionen nur mit einer Doppler-verschobenen Frequenz ($\omega' = \omega - kv_0$). Die Dichten werden in die Poisson-Gleichung eingesetzt und man erhält aus

$$\epsilon_0 \nabla E_1 = e(n_{1,i} - n_{1,e}) \tag{4.162}$$

die Dispersionsrelation:

$$1 = \omega_p^2 \left[\frac{m/M}{\omega^2} + \frac{1}{(\omega - kv_0)^2} \right] \tag{4.163}$$

Diese Gleichung kann man grafisch lösen. Man stellt fest das eine Instabilität entsteht falls

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\Omega_p^2 = (\omega_p - kv_0)^2 \tag{4.164}$$

gilt. D.h. falls die Plasmafrequenz der Ionen dieselbe ist wie die Doppler-verschobene Plasmafrequenz der sich bewegenden Elektronen tritt die Instabilität auf, weil die Dichteschwankungen in beiden Flüssigkeiten (Elektronen und Ionen) dergestalt sind, daß sich positive und negative Ladungen exakt aufheben und die potentielle Energie so minimal wird (Abb. 4.20).

$$\langle \frac{1}{2} m \left(n_0 + n_1\right) \left(v_0 + v_1\right)^2 \rangle < \frac{1}{2} m n_0 v_0^2 \rangle \tag{4.165}$$

d.h. die mittlere Energie in dem System mit Störung (potentielle Energie gegeben durch das Potential und die kinetische Energie gegeben durch v_1) wird so geringer als die Energie in dem System ohne Störung. Das hat zur Folge daß die Amplitude einer anfänglichen Oszillation immer größer wird und eine Instabilität entsteht.

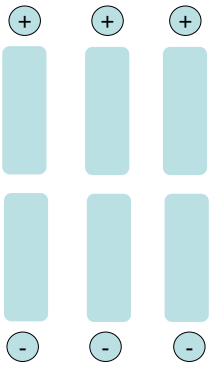


Abbildung 4.20: Erfüllung der Poisson-Gleichung durch Elektronen-Oszillationen im bewegten Bezugssystem.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Kapitel 5

Wellen in Plasmen

Die Stabilität eines magnetisierten Plasmas wird durch die Grundgleichungen der Magnetohydrodynamik beschrieben, wobei grundsätzlich von Quasineutralität ausgegangen wird. Diese Quasineutralität läßt sich allerdings lokal stören und die damit verbundenen elektrischen und magnetischen Felder beeinflussen das umgebende Plasma, Wellen entstehen.

Die Ausbreitung bzw. Absorption von Wellen ist ein zentrales Instrument, um den Zustand eines Plasmas von außen zu beobachten. Jedem Plasma läßt sich ein Brechungsindex zuordnen. Durch eine Messung der Phasenverschiebung bei dem Durchgang einer elektromagnetischen Welle durch ein Plasma, läßt sich somit die Plasmadichte bestimmen. Zudem können eingestrahlte Wellen von dem Plasma absorbiert werden und dienen somit als Heizmethode.

Zur Beschreibung von Wellen in Plasmen geht man von einer Gleichgewichtsdichte n_0 aus, die sich beim Durchgang einer Welle um einen kleinen Betrag n_1 ändert. Diese Störung wird durch einen Fourier-Ansatz beschrieben:

$$n_1 e^{i(kx-\omega t)} \tag{5.1}$$

Derselbe Störungs-Ansatz wird ebenso für die Komponenten Geschwindigkeit, elektrisches und magnetisches Feld gewählt.
Man unterscheidet prinzipiell

- **parallel und senkrecht** für die Ausbreitungsrichtung bezüglich des statischen Magnetfeldes
- **longitudinal und transversal** für die Ausbreitungsrichtung bezüglich des elektrischen Feldes

- **elektrostatisch und elektromagnetisch** bei elektrostatischen Wellen tritt nur eine Störung in $\vec{E}_1$ auf, während bei elektromagnetischen Wellen eine Störung in $\vec{E}$ und $\vec{B}$ auftritt. Bei elektrostatischen Wellen impliziert dies, dass die rechte Seite der Gleichung:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}} \tag{5.2}$$

zu Null werden muß, damit eine Änderung in $\vec{E}$ nicht automatisch eine Änderung in $\vec{B}$ hervorruft. Dies kann nur durch eine besondere Wahl von $\vec{j}$ gewährleistet sein, was sofort verdeutlicht dass elektrostatische Wellen nur in Medien vorkommen können. Das typische Beispiel ist eine elektrostatische Plasma-Oszillation, bei dem sich $\vec{j}$ und $\vec{E}$ abwechseln wie in Abb. 5.1 illustriert.

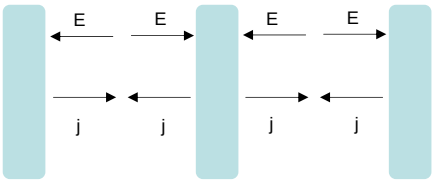


Abbildung 5.1: Bei elektrostatischen Wellen kompensiert sich $\dot{\vec{E}}$ und Teilchenstrom $\vec{j}$.

5.1 Elektrostatische Wellen

5.1.1 Elektronen-Oszillationen

Die Impulsbilanz zur Beschreibung von Elektronen-Oszillationen (unter der Annahme $T_e = 0$) ist:

$$mn \left[\frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \nabla v_e \right] = -en\vec{E} \tag{5.3}$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla n_e v_e = 0 \tag{5.4}$$

wir entwickeln in eine kleine Störung der Dichte und Geschwindigkeit, mit $v_0 = 0$ und $\nabla n_0 = 0$. Die Impulsbilanz ergibt damit:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

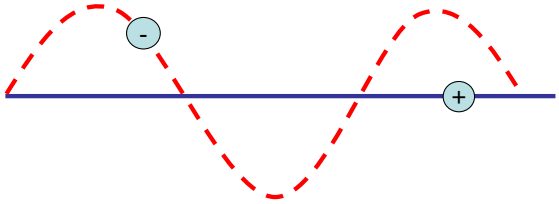


Abbildung 5.2: Elektrostatischen Elektronen-Wellen. Die Ionen werden als ruhend betrachtet.

$$m\left[\frac{\partial v_1}{\partial t} + \underbrace{v_1 \nabla v_1}_{\to 0 \;\; ,wg. \;\; v_1^2 \ll v_1}\right] = -e\vec{E}_1 \tag{5.5}$$

und die Teilchenbilanz

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla(n_0 v_1 + n_1 v_1) = 0 \tag{5.6}$$

Der Term $n_1 v_1$ kann gegen $n_0 v_1$ vernachlässigt werden.

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + n_0 \nabla v_1 = 0 \tag{5.7}$$

mit der Poisson-Gleichung bei ruhenden Ionen ($n_{i,1} = 0$) ergibt sich

$$\nabla E_1 = -\frac{e}{\epsilon_0} n_1 \tag{5.8}$$

durch Transformation in den Fourier-Raum ergibt sich

$$-im\omega v_1 = -eE_1 \tag{5.9}$$

$$-i\omega n_1 = -n_0 ikv_1 \tag{5.10}$$

$$ikE_1\epsilon_0 = -en_1 \tag{5.11}$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen v_1, E_1 und n_1 so erhält man als Lösung für ω:

$$\boxed{\omega_p = \left(\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}\right)^{1/2}} \tag{5.12}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Dies entspricht der **Plasmafrequenz** für eine Oszillation der Elektronen vor einem ruhenden Ionenhintergrund.
Diese Oszillation ist noch keine Welle, die sich ausbreitet. Betrachtet man ein Plasma mit einem oszillierenden Bereich in Nachbarschaft zu einem nicht oszillierenden Bereich, sieht der nicht oszillierenden Bereich kein oszillierendes E-Feld, da sich die lokale Abweichung von der Quasineutralität bei der Gauß'schen Integration herausmittelt. D.h. nur durch Randeffekte bei endlichen Volumina ergibt sich ein Übergreifen des elektrischen Feldes auf benachbarte Bereiche.

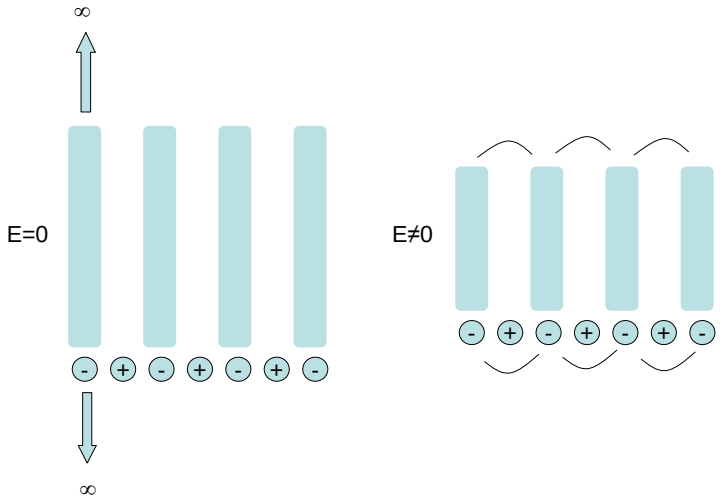


Abbildung 5.3: Elektrostatischen Plasma-Oszillationen können sich bei $T_e = 0$ in unendlich ausgedehnten Plasmen nicht ausbreiten. In begrenzten Plasmen führen Randeffekte zu einer Ausbreitung der Oszillationen in angrenzende Bereiche.

5.1.2 Elektronen-Wellen

Von den Plasma-Oszillationen zu den elektrostatischen Elektronen-Wellen kommt man durch Berücksichtigung der endlichen Temperatur der Elektronen.
Es muss jetzt gelten:

$$mn\left[\frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \nabla v_e\right] = -en\vec{E} - \nabla p = -en\vec{E} - 3k_B T_e \nabla n_e \qquad (5.13)$$

hier haben wir den Druck durch die Adiabatengleichung in einen Gradienten in der Dichte umgewandelt. Hier nehmen wir (im Gegensatz zu isothermen)

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

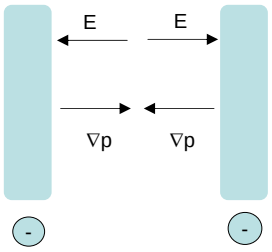


Abbildung 5.4: Der Gradient im Druck erzeugt einen zusätzlichen Term in der Impulsbilanz der Elektronen. Dies ergibt die elektrostatischen Elektronen-Wellen.

adiabatische Verhältnisse an, d.h. die Welle ist so schnell, dass die Temperatur keine Zeit hat sich in benachbarten Bereichen auszugleichen. Deshalb der Faktor 3, der aus der Beziehung:

$$\gamma = \frac{2+N}{N} \tag{5.14}$$

stammt, mit N der Zahl der Freiheitsgrade. Da wir die Ausbreitung in eine Richtung betrachten ist N hier 1 und demnach $\gamma = 3$.
Wir erhalten wieder die ähnlichen Gleichungen wie für die Plasma-Oszillationen nur mit dem Term ∇p erweitert:

$$-in_0 m\omega v_1 = -en_0 E_1 - 3k_B T_e ikn_1 \tag{5.15}$$

$$-i\omega n_1 = -n_0 ikv_1 \tag{5.16}$$

$$ikE_1\epsilon_0 = -en_1 \tag{5.17}$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen v_1, E_1 und n_1 so erhält man als Lösung für ω:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} + \frac{3k_B T_e}{m}k^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2}v_{th}^2 k^2} \tag{5.18}$$

Die Dispersionsrelation wird in Abb. 5.5 veranschaulicht:
Man erkennt, daß die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit der Elektronen-Wellen die thermische Geschwindigkeit ist. Bei kleinen werten von k, sprich langen Wellenlängen, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit bei 0, da auch der Gradient zu Null wird und demnach durch Diffusion, die Information von

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

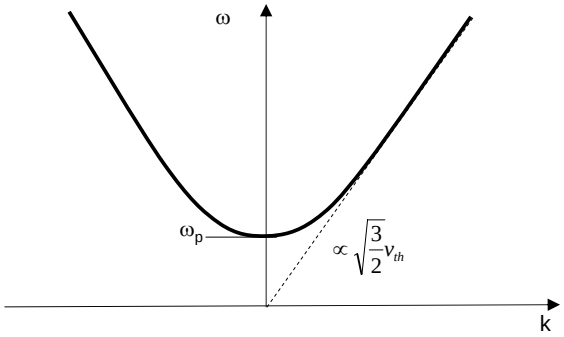


Abbildung 5.5: Dispersion elektrostatischer Elektronen-Wellen.

oszillierenden Bereichen zu nicht oszillierenden nicht weiter getragen werden kann.

5.1.3 Ionen-Wellen

Bei der Beschreibung der Oszillation der Ionen kann man nicht mehr ad hoc voraussetzen, daß die sehr viel leichteren Elektronen in Ruhe bleiben. Vielmehr gleichen die Elektronen die Störung des Potentials durch eine Dichteschwankung der Ionen instantan aus gemäß der Boltzmann-Beziehung.

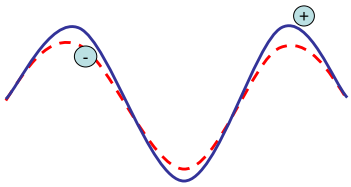


Abbildung 5.6: Bei elektrostatischen Ionen-Wellen folgen die Elektronen den Dichteschwankungen der Ionen. Dies geschieht nicht vollständig sondern eine Differenz zwischen Elektronen- und Ionendichte gemäß der Boltzmann-Beziehung verbleibt.

Für die Impulsbilanz der Ionen setzen wir wieder:

$$Mn\left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + \underbrace{v_i \nabla v_i}_{\ll}\right] = enE - \nabla p = -en\nabla\Phi - \gamma_i k_B T_i \nabla n_i \qquad (5.19)$$

im Fourier-Raum ergibt sich

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$-i\omega M n_0 v_{i,1} = -e n_0 i k \Phi_1 - \gamma_i k_B T_i i k n_1 \tag{5.20}$$

Die Abweichung von der Gleichgewichtsdichte, die sich aufbauen kann ist gegeben durch die Boltzmann-Beziehung.

$$n_e = n = n_0 + n_1 = n_0 e^{\frac{e\Phi_1}{k_B T_e}} = n_0(1 + \frac{e\Phi_1}{k_B T_e} + ...) \tag{5.21}$$

daraus folgt

$$n_1 = n_0 \frac{e\Phi_1}{k_B T_e} \tag{5.22}$$

Die Teilchenbilanz ergibt wieder, wie gehabt

$$i\omega n_1 = n_0 i k v_{i,1} \tag{5.23}$$

wir eliminieren wieder n_1, v_1 und Φ_1 und erhalten:

$$i\omega M n_0 v_{i,1} = \left(e n_0 i k \frac{k_B T_e}{e n_0} + \gamma_i k_B T_i i k \right) \frac{n_0 i k v_{i,1}}{i\omega} \tag{5.24}$$

damit ergibt sich

$$\boxed{\omega^2 = k^2 \left(\frac{k_B T_e}{M} + \gamma_i \frac{k_B T_i}{M} \right)} \tag{5.25}$$

Man erkennt, daß die Ionen-Wellen nur bei endlicher Temperatur auftreten können. Nur bei endlicher Temperatur können sich die Elektronen soweit von den Ionen entfernen, dass sich überhaupt eine elektrisches Feld aufbauen kann. Diese Trennung der Elektronen von den Ionen kann durch die Temperatur der Elektronen gegeben sein, dies erfolgt isotherm ($\propto k_B T_e$, hier ist die Frequenz der Ionenwellen sehr viel kleiner als die der Elektronenwellen so daß der isotherme Ansatz gültig ist). Die Trennung der Ionen von den Elektronen erfolgt adiabatisch ($\propto \gamma_i k_B T_i$).
Bei großen Wellenzahlen geht die Schwingung in eine Ionenplasmafrequenz-Oszillation über. Diesen Grenzwert erhält man nur wenn man die Abweichung der Elektronendichte vom Gleichgewichtswert explizit betrachtet und in die Poisson-Gleichung zur Bestimmung von Φ_1 einsetzt.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

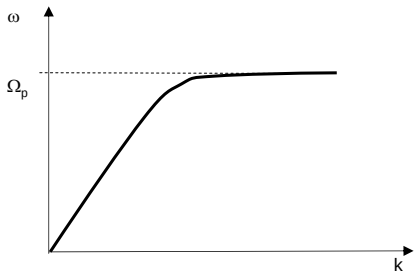


Abbildung 5.7: Dispersion elektrostatischer Ionen-Wellen.

5.1.4 Elektronenwellen senkrecht zum B-Feld, obere hybride Frequenz

Jetzt betrachten wir elektrostatische Wellen senkrecht zu einem stationären B Feld. Wieder betrachten wir die Ionen als ruhend. Die Impulsbilanz ist jetzt

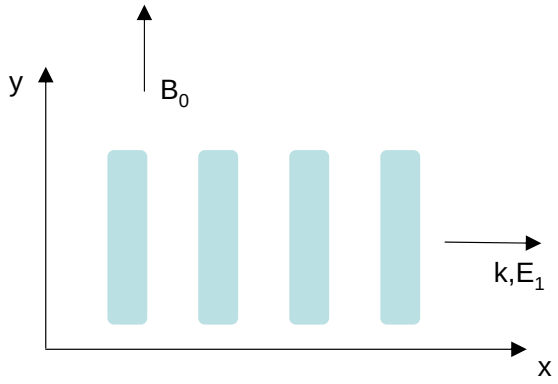


Abbildung 5.8: Koordinatensystem für Elektronen-Wellen senkrecht zum B-Feld.

$$mn\frac{\partial v_1}{\partial t} = -e(E_1 + v_1 \times B_0) \tag{5.26}$$

Die Teilchenbilanz ergibt wieder

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla v_1 = 0 \tag{5.27}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Die Poisson-Gleichung schließlich

$$\epsilon_0 \nabla E_1 = -en_1 \tag{5.28}$$

Die Impulsbilanz im Fourier-Raum nach Richtungen aufgelöst:

$$\begin{aligned} -i\omega m v_x &= -eE_1 - ev_y B_0 && (5.29)\\ -i\omega m v_y &= +ev_x B_0 && (5.30)\\ -i\omega m v_z &= 0 && (5.31) \end{aligned}$$

Auflösen liefert:

$$i\omega m v_x = eE_1 + eB_0 \frac{ieB_0}{m\omega} v_x \tag{5.32}$$

aus der Teilchenbilanz

$$n_1 = \frac{k}{\omega} n_0 v_x \tag{5.33}$$

damit in die Poisson-Gleichung

$$\epsilon_0 ikE_1 = -e\frac{k}{\omega} n_0 \frac{eE_1}{im\omega} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \tag{5.34}$$

daraus wird

$$\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{5.35}$$

und somit

$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 = \omega_{oh}^2} \tag{5.36}$$

Dies bezeichnet man als die **obere hybride Frequenz**. Diese Frequenz ist etwas höher als die Plasmafrequenz, da die Gyrationsbewegung im Magnetfeld der Plasma-Oszillation überlagert ist, wie in Abb.5.9 veranschaulicht wird.

5.1.5 Ionenwellen senkrecht zum B-Feld, untere hybride Frequenz

Abschließend betrachten wir jetzt die Ausbreitung elektrostatischer Ionen-Wellen senkrecht zu B_0. Zunächst betrachten wir den Fall eines endlichen

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

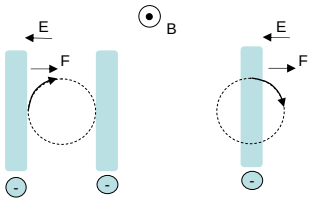


Abbildung 5.9: Die Elektronen-Schwingung gemäß der Plasmafrequenz überlagert sich der Gyrationsfrequenz. Dies führt zu einer Resonanzfrequenz, die höher liegt als die der Gyration alleine.

Winkels nahe bei 90° der Ausbreitungsrichtung zum Magnetfeld. Durch diese kleine Abweichung von 90° gibt es eine Möglichkeit für die Elektronen die Dichteschwankungen auszugleichen und die Störung gemäß Boltzmann-Beziehung zu bestimmen, wie in Abb.5.10 illustriert. Dies ist analog zur Diskussion der Driftwellen Instabilitäten.

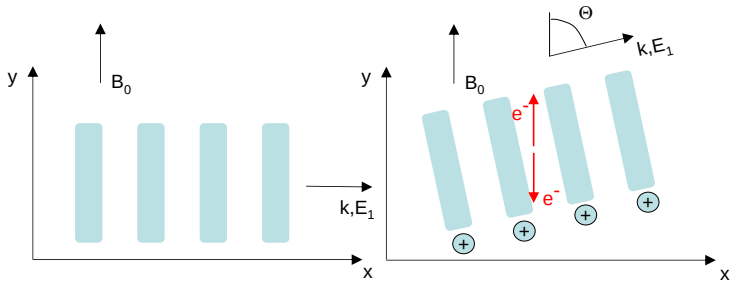


Abbildung 5.10: Bei elektrostatischen Ionen-Wellen senkrecht zum Magnetfeld können die Elektronen die Dichteschwankungen der Ionen nur dann ausgleichen, wenn der Winkel zwischen Wellenausbreitung und B-Feld nicht genau 90° beträgt.

Wir beginnen wieder mit der Impulsbilanz gemäß:

$$M\frac{\partial v_1}{\partial t} = -e\nabla\Phi_1 + ev_1 \times B_0 \tag{5.37}$$

Die Teilchenbilanz ergibt wieder

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0\nabla v_1 = 0 \tag{5.38}$$

- $\Theta \approx 90$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Zunächst betrachten wir den Fall, dass die Ausbreitungsrichtung nur ca. 90° zur Magnetfeldrichtung liegt. Für das elektrische Feld beziehungsweise die Potentialstörung könne wir dadurch wieder die Boltzmann-Beziehung verwenden.

$$n_1 = n_0 \frac{e\Phi_1}{k_B T_e} \tag{5.39}$$

aus der Impulsbilanz ergibt sich wieder:

$$-i\omega M v_{i,x} = eik\Phi_1 + ev_{i,y}B_0 \tag{5.40}$$
$$-i\omega M v_{i,y} = -ev_{i,x}B_0 \tag{5.41}$$

daraus folgt wieder

$$v_{i,x} = \frac{ek}{M\omega}\Phi_1 \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \tag{5.42}$$

mit Teilchenbilanz für die Propagation in x-Richtung

$$n_1 = n_0 \frac{k}{\omega} v_x \tag{5.43}$$

wir eliminieren wieder die Geschwindigkeit v_x und n_1 und erhalten

$$\boxed{\omega^2 = \Omega_c^2 + k^2 \frac{k_B T_e}{M}} \tag{5.44}$$

jetzt erhöht sich die Resonanzfrequenz um einen Betrag $k^2 \frac{k_B T}{M}$, da die Ionen zusätzlich zu ihrer Gyration, durch die ambipolare Diffusion getrieben werden (im Falle der Elektronenwellen war dies direkt ein Beitrag der Plasmafrequenz der Elektronen siehe Gl. 5.36). Dies bezeichnet man als **Ionen-Zyklotron-Wellen**.

- $\Theta = 90$

  Jetzt betrachten wir den Fall daß zwischen Ausbreitungsrichtung und Magnetfeld genau 90° liegen. Jetzt müssen wir analog zur Impulsbilanz für die Ionen, die Impulsbilanz für die Elektronen aufstellen:

$$v_{e,x} = -\frac{ek}{m\omega}\Phi_1 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \tag{5.45}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

die Kontinuitätsgleichung für die Elektronen ergibt:

$$n_{e,1} = n_0 \frac{k}{\omega} v_{e,x} \tag{5.46}$$

mit $n_e = n_i$ und $v_{e,1} = v_{i,1}$ ergibt sich

$$\frac{1}{M}\left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} = -\frac{1}{m}\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \tag{5.47}$$

mit $M \gg m$ ergibt sich

$$\boxed{\omega = (\Omega_c \omega_c)^{1/2} = \omega_{lh}} \tag{5.48}$$

Die **untere hybride Frequenz**. Diese Wellen können nur anschwingen bei einer Wellenausbreitung unter 90° zum Magnetfeld.

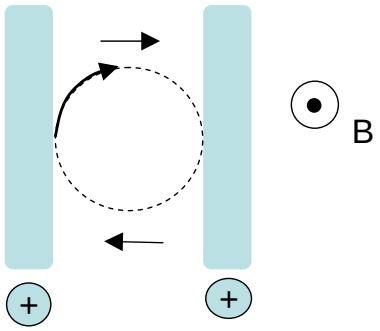


Abbildung 5.11: Bei der unteren Hybriden überlagern sich Resonanzbedingung der Elektronen mit der der Ionen.

5.2 Elektromagnetische Wellen

Bei elektromagnetischen Wellen tritt auch eine Änderung in B_1 auf. Diese Wellen sind die einzigen die im Vakuum propagieren können. Sämtliche Wellen die auf Plasmen eingestrahlt werden sind deshalb notwendigerweise elektromagnetische Wellen. Diese können an die elektrostatischen Wellen im Plasma ankoppeln, wenn Frequenzen identisch sind und die elektrischen Feldkomponenten in die gleiche Richtung zeigen.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

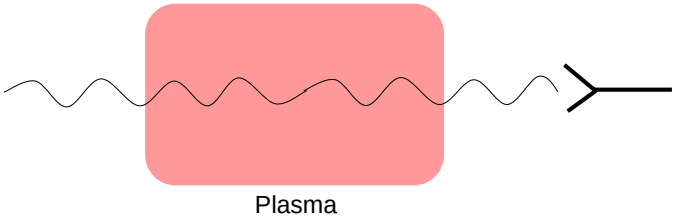


Abbildung 5.12: Transmission elektromagnetischer Wellen durch ein Plasma.

Ganz allgemein gilt

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{B} \tag{5.49}$$

und

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \dot{\vec{E}} \tag{5.50}$$

Dies nach der Zeit abgeleitet und in Gl. 5.49 eingesetzt ergibt

$$-\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \mu_0 \dot{\vec{j}} + \epsilon_0 \mu_0 \ddot{\vec{E}} \tag{5.51}$$

$$-\left(\nabla(\nabla \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}_1\right) = \mu_0 \dot{\vec{j}} + \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}} \tag{5.52}$$

im Fourier-Raum ergibt dies die allgemeine **Wellengleichung**:

$$+\vec{k}(\vec{k}\vec{E}) - k^2 \vec{E} = -i\omega\mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2}\omega^2 \vec{E} \tag{5.53}$$

5.2.1 em-Wellen für $B_0 = 0$

Für den Fall transversaler, elektromagnetischen Wellen liegen $\vec{E}$ und der Wellenvektor k senkrecht zueinander. Damit fällt der erste Term in Gl. 5.53 weg und man erhält:

$$k^2 E = i\omega\mu_0 j + \frac{\omega^2}{c^2} E \tag{5.54}$$

wir betrachten den Fall der Impulsbilanz in einem Medium für $T_e = 0$ und $v_{e,0} = 0$. Die Stoßfrequenz sei ν_m.

$$j = -n_0 e v_{e,1} \tag{5.55}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$nm\left[\frac{\partial}{\partial t}v_1 + \underbrace{v_1\nabla v_1}_{\ll}\right] = -enE_1 - mn\nu_m v_1 \tag{5.56}$$

daraus wird im Fourier-Raum

$$-mi\omega v_1 = -eE_1 - m\nu_m v_1 \tag{5.57}$$

oder

$$v_1 = \frac{eE_1}{-im\omega + m\nu_m} \tag{5.58}$$

Dies können wir jetzt in die Wellengleichung 5.53 einsetzen und erhalten

$$k^2 = -i\omega\mu_0 n_0 e\frac{e}{-im\omega + m\nu_m} + \frac{\omega^2}{c^2} \tag{5.59}$$

bzw.

$$k^2 = \omega\frac{1}{c^2}\omega_p^2\frac{1}{\omega + i\nu_m} + \frac{\omega^2}{c^2} \tag{5.60}$$

durch Umformen erhalten wir schließlich

$$\boxed{c^2k^2 = \omega^2\underbrace{\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{1}{1 + i\frac{\nu_m}{\omega}}\right]}_{n^2\text{...Brechungsindex}^2}} \tag{5.61}$$

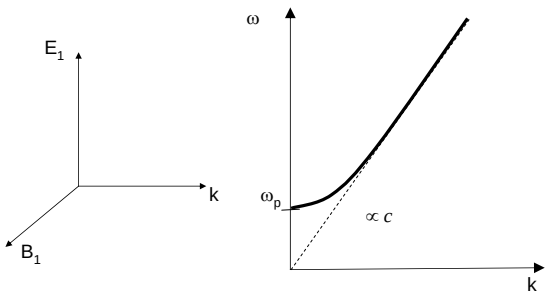


Abbildung 5.13: Dispersion elektromagnetischer Wellen für Magnetfeld gleich Null.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

D.h. für hohe Frequenzen nähert sich die Dispersion, der Dispersion im Vakuum an, d.h. die Welle kann propagieren und "sieht" das Plasma nicht. Erst wenn die Frequenz der Welle sich der Plasmafrequenz nähert, beginnen die Elektronen dem oszillierenden E-Feld folgen zu können und eine Dispersion tritt auf. Für Frequenzen unterhalb der Plasmafrequenz ist die Trägheit der Elektronen klein genug, so dass sie den elektrischen Feld-Oszillationen der em-Welle in Phase folgen können und die Welle kann sich nicht mehr ausbreiten. Es tritt Dämpfung auf.
Der Brechungsindex eines Plasmas wird vielfältig für diagnostische Zwecke genutzt. Typisches Beispiel ist die Interferometrie, bei der durch eine Phasenverschiebung auf den Brechungsindex und über die Plasmafrequenz auf die Dichte im Plasma geschlossen wird.

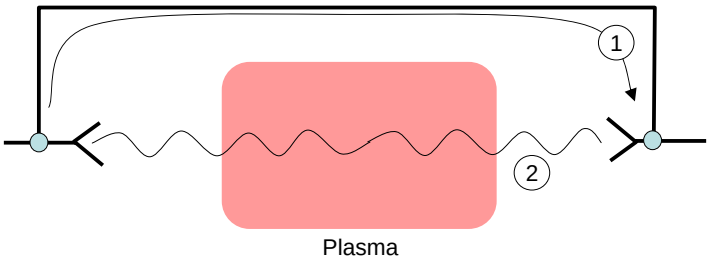


Abbildung 5.14: Mittels Interferometrie läßt sich der Brechungsindex eines Plasma messen.

5.2.2 em-Wellen mit $\mathbf{B_0 \neq 0}$

Ausbreitungsrichtung $\perp B_0$

Auch hier können wir wieder zwei Fälle unterscheiden. Zunächst betrachten wir den Fall, dass die Störung im elektrischen Feld E_1 parallel zu B_0 liegt. Damit erfolgt die Bewegung der Elektronen parallel zum Magnetfeld und somit tritt keine zusätzliche Komponente durch die Lorentz-Kraft auf. Dies bezeichnet man als **ordentliche Welle** mit der Dispersion:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \tag{5.62}$$

Liegt die Störung im elektrischen Feld E_1 senkrecht zu B_0, wie in Abb. 5.16 skizziert, bezeichnet man dies als **außerordentliche Welle**.
Wir beginnen wieder mit der Wellengleichung für unseren Fall.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

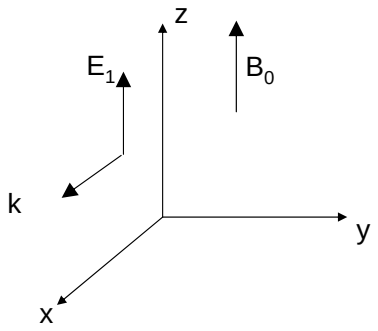


Abbildung 5.15: Ordentliche em-Welle.

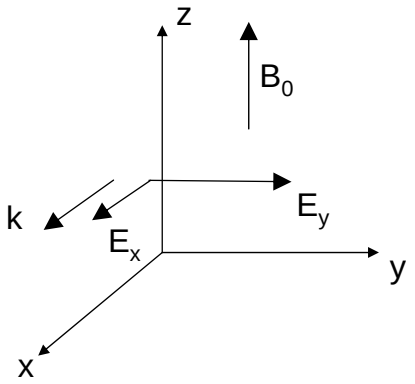


Abbildung 5.16: außerordentliche em-Welle.

$$-\vec{k}(\vec{k}\vec{E}_1) + k^2\vec{E} = i\omega\mu_0\vec{j} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}_1 \tag{5.63}$$

Die Impulsbilanz für den Fall ohne Dämpfung und $T_e = 0$ und $v_0 = 0$ ergibt:

$$m\frac{\partial v_1}{\partial t} = -eE_1 - e(\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) \tag{5.64}$$

Wir lösen dies für die x- und y-Richtung und erhalten:

$$v_x = -i\frac{e}{m\omega}(E_x + v_y B_0) \tag{5.65}$$

$$v_y = -i\frac{e}{m\omega}(E_y - v_x B_0) \tag{5.66}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Dies wird in die Wellengleichung 5.53 eingesetzt

$$(\omega^2 - c^2k^2)\vec{E}_1 + c^2\vec{k}(\vec{k}\vec{E}_1) = -i\omega\frac{1}{\epsilon_0}\vec{j}_1 = in\omega\frac{1}{\epsilon_0}e\vec{v}_1 \tag{5.67}$$

Diese Wellengleichung lösen wir auf unter dr Maßgabe, daß E_x in Richtung der Wellenausbreitung $\vec{k}$ zeigt. Damit bekommt man:

$$(\omega^2 - c^2k^2)\vec{E}_1 + c^2k\vec{k}E_x = in\omega\frac{1}{\epsilon_0}e\vec{v}_1 \tag{5.68}$$

Jetzt lassen sich die Geschwindigkeiten $\vec{v}_1$ auflösen und entsprechend des x- und der y-Richtung auflösen zu:

$$\omega^2 E_x = -\frac{i\omega n_0 e}{\epsilon_0}\frac{e}{m\omega}\left(iE_x + \frac{\omega_c}{\omega}E_y\right)\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \tag{5.69}$$

$$\left(\omega^2 - c^2k^2\right)E_y = -\frac{i\omega n_0 e}{\epsilon_0}\frac{e}{m\omega}\left(iE_y - \frac{\omega_c}{\omega}E_x\right)\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \tag{5.70}$$

Jetzt haben wir zwei Gleichungen für die Feldkomponenten E_x und E_y, die sich als Matrix schreiben lassen:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0 \tag{5.71}$$

Dieses Gleichungssystem hat eine Lösung, falls die Determinante zu Null wird. Damit bekommt man die Bedingung:

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 - \omega_{oh}^2 - \left[\left(\frac{\omega_p^2\omega_c}{\omega}\right)^2\frac{1}{\omega^2-\omega_{oh}^2}\right]}{\omega^2 - \omega_c^2} \tag{5.72}$$

Schließlich erhält man die Dispersions-Relation für elektromagnetische Wellen senkrecht zum Magnetfeld mit:

$$\boxed{c^2k^2 = \omega^2\underbrace{\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{\omega^2-\omega_p^2}{\omega^2-\omega_{oh}^2}\right]}_{n^2\text{...Brechungsindex}^2}} \tag{5.73}$$

- **Resonanzen**

  Resonanzen ergeben sich für $k \to \infty$, D.h. die Wellenlänge geht gegen Null. Oder wegen

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$ck = n\omega \tag{5.74}$$

einem Brechungsindex n $\to 0$. Dies entspricht einer Absorption der Welle durch Anregung von Plasma-Oszillationen mit der Resonanzfrequenz der oberen Hybriden:

$$\omega^2 = \omega_{oh}^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 \tag{5.75}$$

hierbei ist die Komponente E_x der elektromagnetischen Welle, die in x-Richtung läuft, in Phase mit dem elektrischen Feld E_1 der Plasma-Oszillation in diese Richtung. Dieser Energie-Übertrag entspricht der oberen hybriden Heizung.

- **Cutoff**

  Cutoff's ergeben sich für $k \to 0$. D.h. die Wellenlänge geht gegen unendlich. Hier ist jetzt der Brechungsindex 0 und die em-Welle kann sich damit nicht mehr ausbreiten. Für diese Bedingung ergibt sich.

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - \omega_c^2 \frac{1}{\omega^2 - \omega_p^2}} \tag{5.76}$$

  Dies läßt sich reduzieren zu.

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \pm \frac{\omega_c}{\omega} \tag{5.77}$$

  Die unterschiedlichen Vorzeichen entsprechen dem links- und rechtshändigen Cut-Off. Dies wird in Abb. 5.17 veranschaulicht.

  Die außerordentliche Welle hat eine Resonanz bei ω_{oh} da hier die Welle an die Plasma-Oszillation ankoppeln kann. Die ordentliche Welle hat keine Resonanz, da keine Komponente E_1 entlang der Ausbreitungsrichtung existiert.

Ausbreitungsrichtung $\| B_0$

Für die Herleitung der Dispersion, beginnen wir wieder mit einem Koordinatensystem gemäß Abb.5.18.
Wir beginnen mit der Wellengleichung.

$$-\vec{k}(\vec{k}\vec{E}_1) + k^2\vec{E} = i\omega\mu_0\vec{j} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}_1 \tag{5.78}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

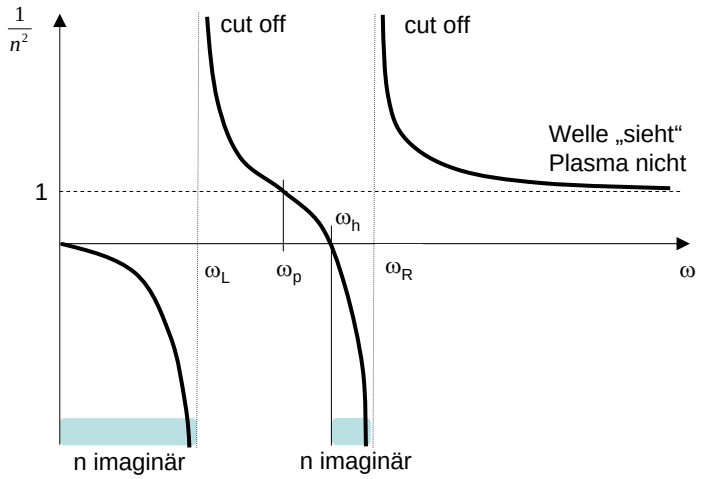


Abbildung 5.17: 1/Brechungsindex^2 elektromagnetischer Wellen mit Ausbreitungsrichtung senkrecht zum Magnetfeld.

der Impulserhaltung

$$-i\omega m\vec{v}_1 = -e\vec{E}_1 - e\vec{v}_1 \times \vec{B}_0 \tag{5.79}$$

und

$$\vec{j} = -en_0\vec{v}_1 \tag{5.80}$$

Wieder läßt sich dies nach den Komponenten in x- und in y-Richtung auflösen zu:

$$\left(\omega^2 - c^2k^2\right) E_x = \frac{\omega_p^2}{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \left(E_x - i\frac{\omega_c}{\omega}E_y\right) \tag{5.81}$$

$$\left(\omega^2 - c^2k^2\right) E_y = \frac{\omega_p^2}{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \left(E_y + i\frac{\omega_c}{\omega}E_x\right) \tag{5.82}$$

$$\tag{5.83}$$

In Analogie zur Lösung bei der Wellenausbreitung senkrecht zum Magnetfeld, bekommt man aus der Bedingung, daß die Determinante des Gleichungssystems verschwindet folgende Lösung für den **Brechungsindex**:

$$\boxed{n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{1}{1 \mp \frac{\omega_c}{\omega}}} \tag{5.84}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

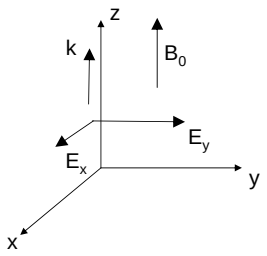


Abbildung 5.18: Koordinatensystem für die Wellenausbreitung parallel zum Magnetfeld.

Die Vorzeichen entsprechen wieder einer R und einer L-Welle entsprechend der Phasenverschiebung zwischen den Feldstärke-Komponenten. R entspricht rechts-zirkular und L entspricht links-zirkular.

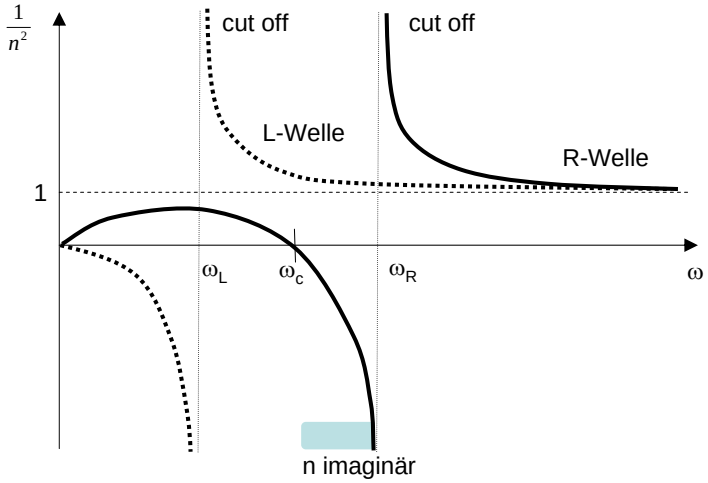


Abbildung 5.19: 1/Brechungsindex^2 elektromagnetischer Wellen parallel zum Magnetfeld.

Den Verlauf von 1/ Brechungsindex^2 ist in Abb. 5.19 gezeigt. Wir erhalten eine Resonanz bei der Zyklotronfrequenz. Dies gilt aber nur für die eine Polarisations-Richtung, da hierbei das elektrische Feld phasen-richtig zur Gyration rotiert. Die andere Polarisations-Richtung wird nicht absorbiert, wie in Abb.5.20 illustriert.

- **Whistler-Moden**

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

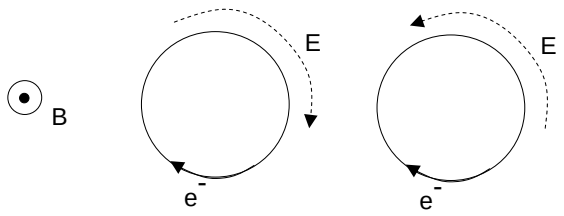


Abbildung 5.20: Absorption elektromagnetischer Wellen findet nur für eine Polarisation statt.

Dies sind elektromagnetische Wellen parallel zum Magnetfeld, die zwischen den Polen in der Ionosphäre hin und herlaufen. Im akustischen Bereich $< \omega_c$, hat die Dispersion positive Krümmung. Dementsprechend kommen niedrige Frequenzen später an als höhere und man hört einen fallenden Ton.

- **Helikon-Plasmen**

  Betrachtet man die Whistlermoden in begrenzten Plasmen, so bezeichnet man diese Wellen als Helikonwellen ("Helikon", da sie zirkular polarisierten Plasmawellen entsprechen). Eine typische Anordnung ist eine entsprechende Antenne, die bei 13.56 MHz getrieben wird und durch ihre Form diese Moden anregen kann. Das Magnetfeld beträgt typischerweise 100 mT. Die Zyklotronresonanzfrequenz ω_c bei diesen Magnetfeldern liegt bei mehreren GHz, d.h. die Erregerfrequenz ist deutlich unter ω_c. Die elektromagnetische Welle hat nur eine endliche Eindringtiefe, die allerdings so groß ist, daß sie die typischen technischen Plasmen nahezu ausfüllen kann. Ein Optimum in der Leistungseinkopplung entsteht, wenn eine stehende Welle in dem Plasmagefäß angeregt wird. In der Plasmatechnik ist dies ein attraktiver Entladungstyp zur effizienten Erzeugung eines hoch dichten Plasmas. Allerdings hängt dieser Zustand zu empfindlich von Entladungsgeometrie etc. ab, und konnte sich deshalb nicht auf breiter Front durchsetzen.

- **Faraday-Rotation**

  Die Phasen-Geschwindigkeit ist unterschiedlich für rechts und linkszirkular polarisiertes Licht, D.h. der Polarisations-Zustand des Lichtes, das durch ein Plasma dringt kann somit geändert werden.

- **Hochfeldeinkopplung**

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Für das Heizen eines Plasmas bei der Elektronen-Zyklotron-Resonanz-Frequenz, wird eine entsprechende Frequenz (ω_{mw} mehrere GHz) von einem Mikrowellengenerator eingestrahlt. Hierbei ist es wichtig, daß diese Welle den Ort der Resonanz ($\omega = \omega_c$) auch erreicht. Hierfür existiert nur eine erfolgreiche Variante, die sog. **Hochfeldeinkopplung**. D.h. das Fenster der Mikrowellenquelle zur Plasmakammer muß sich in einem Bereich des Plasmagefäßes befinden an dem das Magnetfeld *höher* als das Resonanzfeld ist (Position 2 in Abb. 5.21). Dadurch durchläuft die elektromagnetische Welle einen Bereich in dem immer $\omega_{mw} < \omega_c$ gilt. Koppelt man die Strahlung von der Niederfeldseite (Position 1 in Abb. 5.21) ein, so läuft man zwangsläufig in den Cut-Off hinein und die Welle wird einfach reflektiert.

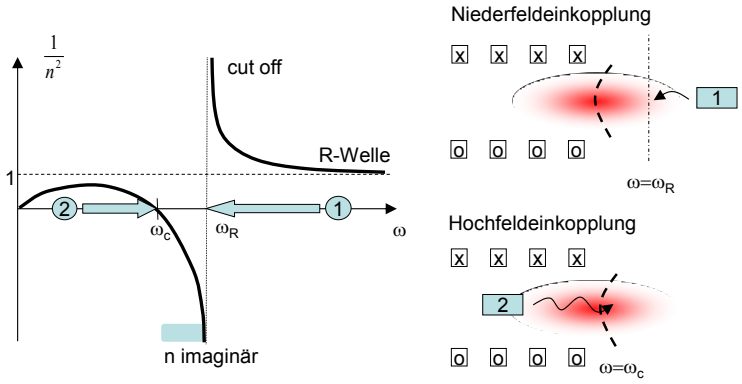


Abbildung 5.21: Damit eine elektromagnetische Wellen parallel zu B_0, die Resonanzzone erreichen kann, muß sie von der Hochfeldseite (Position 1) eingekoppelt werden. Von der Niederfeldseite läuft sie automatisch in den Cut-Off hinein.

5.3 Hydromagnetische Wellen

Abschließend betrachten wir noch den Fall der hydromagnetischen Wellen. Dies sind die langsamsten Wellen-Phänomene, bei denen die Trägheit der Ionen und die unterschiedliche Geschwindigkeit der Ionen und Elektronen berücksichtigt wird. D.h. es kann jetzt nicht mehr von ruhenden Ionen bzw. einer Änderung der Elektronendichte gemäß der Boltzmann-Beziehung ausgegangen werden. Jetzt ist

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

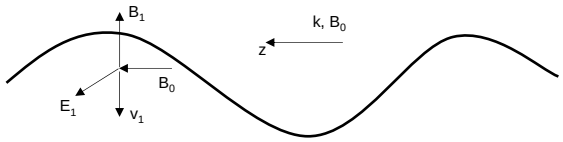


Abbildung 5.22: Koordinatensystem für die Ausbreitung hydromagnetischer Wellen parallel zum Magnetfeld.

$$\vec{j} = en_0(v_{i,1} - v_{e,1}) \tag{5.85}$$

Ausgangspunkt ist auch hier wieder die Wellengleichung

$$-\vec{k}(\vec{k}\vec{E_1}) + k^2\vec{E} = i\omega\mu_0\vec{j} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E_1} \tag{5.86}$$

5.3.1 Alfven-Wellen

Alfven-Wellen sind hydromagnetische Wellen, die sich parallel zum Magnetfeld ausbreiten, gemäß Abb.5.22. Aus der Impulsbilanz der Ionen erhält man die x und y Komponente.

$$v_{i,x} = i\frac{e}{M\omega}\left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1 \tag{5.87}$$

$$v_{i,y} = \frac{e}{M\omega}\frac{\Omega_c}{\omega}\left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1 \tag{5.88}$$

Dies sind dieselben Gleichungen, die wir schon für die Herleitung der elektrostatischen Ionen-Wellen $\perp$ zu B_0 hergeleitet hatten. Im Unterschied zu dieser Analyse, betrachten wir jetzt explizit auch die Geschwindigkeits-Komponenten der Elektronen unter der Näherung $m \ll M$ und $\omega_c \gg \omega$:

$$v_{e,x} = 0 \tag{5.89}$$

$$v_{e,y} = -\frac{E_1}{B} \tag{5.90}$$

Dies entspricht der E $\times$ B Drift in y-Richtung. Jetzt werden die Geschwindigkeiten wieder in die Beziehung für den Strom eingesetzt und dieser in 5.53 eingesetzt. Man erhält:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\omega^2 - c^2k^2 = \Omega_p^2 \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \tag{5.91}$$

Bei sehr niederfrequenten Wellen ergibt sich für $\omega \ll \Omega_c$:

$$\omega^2 - c^2k^2 = -\omega^2 \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2} == -\omega^2 \frac{ne^2}{\epsilon_0 M} \frac{M^2}{e^2 B_0^2} == -\omega^2 \frac{nM}{\epsilon_0 B_0^2} \tag{5.92}$$

damit ist

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 + \frac{nM}{\epsilon_0 B_0^2} \simeq \underbrace{\frac{nM}{\epsilon_0 B_0^2}}_{n^2} \tag{5.93}$$

Daraus ergibt sich die Phasen-Geschwindigkeit als die sogenannte **Alfven-Geschwindigkeit** v_A:

$$\boxed{\frac{\omega}{k} = \frac{B_0}{(\mu_0 nM)^{1/2}} = v_A} \tag{5.94}$$

Alfven-Wellen entsprechen einer Schwingung im Plasma bei der der eingefrorene Fluss um seine Ruhelage schwingt. Das elektrische Feld entsteht durch eine Ladungstrennung auf Grund der Trägheit der Ionen im Vergleich zu der der Elektronen.

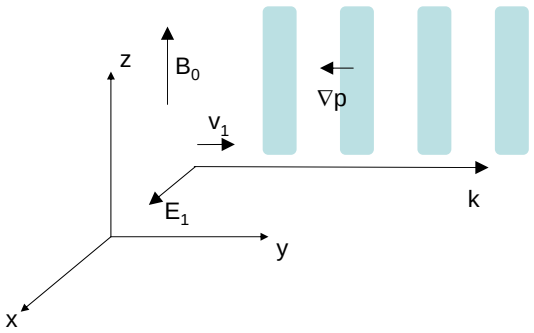


Abbildung 5.23: Alfven Wellen entsprechen niederfrequenten Schwingungen des eingefrorenen Flusses.

5.3.2 Magnetosonische Wellen

Bei der Wellenausbreitung senkrecht zum Magnetfeld werden die Terme E × B und ∇ p entscheidend.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$Mn_0 \frac{\partial}{\partial t} v_{i,1} = en_0(E_1 + v_1 \times B_0) - \nabla p \tag{5.95}$$

in Analogie zur Herleitung der Alfven-Wellen erhalten wir wieder eine Dispersions-Relation.

$$\boxed{\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \frac{v_s^2 + v_A^2}{c^2 + v_A^2}} \tag{5.96}$$

mit

$$v_s = \left(\frac{\gamma k_B T_i + k_B T_e}{M} \right)^{1/2} \tag{5.97}$$

die magnetosonische Welle ist eine MHD Welle bei der die Dichteschwankungen durch einen E × B und ∇p Term getrieben werden.

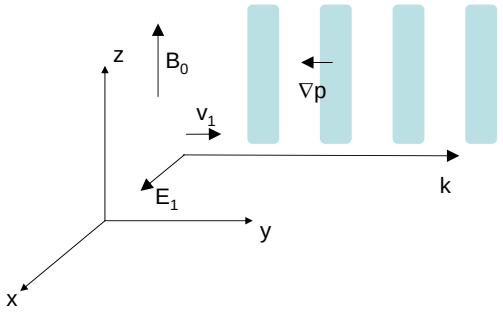


Abbildung 5.24: Magnetosonische Wellen.

Für den den Fall verschwinden Magnetfeldes also $B_0 \to 0$ reduziert sich Gleichung 5.96 zur Dispersion Ionen-akustischer Wellen. Im Fall kalter Plasmen gegeben durch $T \to 0$ bzw. $v_s \to 0$ ergeben sich die sog. schnellen hydromagnetischen Wellen:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \frac{v_A^2}{c^2 + v_A^2} > v_A \tag{5.98}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Kapitel 6

Kinetik

Das kinetische Bild ist allgemeiner als das Fluidbild, da es nicht von einer Temperatur des Plasmas ausgeht, sondern beliebige Geschwindigkeitsverteilungen zulässt. Nichtgleichgewichtsphänomene, wie das Injizieren von schnellen Teilchen in Plasmen oder selektive Wellenheizungen ändern zunächst nur kleine Bereiche dieser Verteilungsfunktion. Durch Stöße der Teilchen untereinander kann sich die Energie dann auf andere Bereiche in der Verteilungsfunktion übertragen. Die Form der Verteilungsfunktion trägt somit Information über die Erzeugungs- und Heizmechanismen in einem Plasma.

Bislang haben wir den Einschluss der Plasmen und die Heizung von Plasmen mittels Wellen behandelt. Im Plasma selber wurde der Energieinhalt im Rahmen des Fluidbildes durch eine Temperatur charakterisiert. Die vollständigere Beschreibung ist allerdings, die Kenntnis der gesamten Verteilungsfunktion im Geschwindigkeitsraum. Diese wird im Rahmen der kinetischen Beschreibung ermittelt. Ziel dieses Vorgehens ist Informationen darüber zu gewinnen, wie sich die Verteilungsfunktion $f(v)$ ausbildet unter dem Einfluss von elektrischen Feldern, die zum Beispiel vorliegen beim Einkoppeln von Wellen in das Plasma. Stöße der Teilchen untereinander führen dann zu einer Umverteilung im Geschwindigkeitsraum. Ausgangspunkt ist die **Vlasov-Gleichung**:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0} \tag{6.1}$$

unter Berücksichtigung von Stößen gilt die **Boltzmann-Gleichung**:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{Stoesse}} \tag{6.2}$$

6.1 Verteilungsfunktion im GGW, Maxwell-Verteilung

Wir betrachten jetzt den Stoßterm auf der rechten Seite der Boltzmann-Gleichung und fordern, daß dieser im Gleichgewicht zu Null werden muß. Die Verteilungsfunktion kann durch Stoßprozesse geändert werden, indem Teilchen in ein Phasenraumelement hinein oder hinaus gestreut werden können. Dies ist in Abb. 6.1 verdeutlicht.

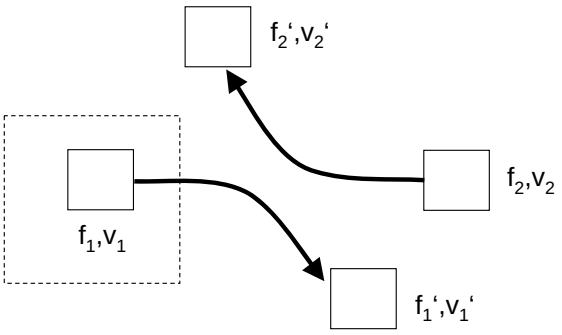


Abbildung 6.1: Stöße zwischen Phasenraumelement d^3v_1 und d^3v_2

Teilchen f_1 und f_2 mit Geschwindigkeiten v_1 und v_2 streuen aneinander und man erhält nach dem Stoß Teilchen f_1' und f_2' mit den Geschwindigkeiten v_1' und v_2'. Der Verlust an f_1 Teilchen im Phasenraumelement $\mathrm{d^3v_1}$ durch Stöße mit Teilchen f_2 aus dem Phasenraum $\mathrm{d^3v_2}$ wird beschrieben durch:

$$f_1 f_2 d^3v_1 d^3v_2 |v_1 - v_2| \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \tag{6.3}$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ist der differentielle Wirkungsquerschnitt. Der Gewinn an Teilchen durch Streuprozesse die neue Teilchen in den Volumenelement $\mathrm{d^3v_1}$ erzeugt kann man durch Zeitumkehr erhalten.

$$f_1' f_2' d^3v_1' d^3v_2' |v_1' - v_2'| \frac{d\sigma'}{d\Omega'} d\Omega' \tag{6.4}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

bei elastischen Stößen muß gelten:

$$|v_1 - v_2| = |v_1' - v_2'| \tag{6.5}$$

und

$$\frac{d\sigma'}{d\Omega'} d\Omega' = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \tag{6.6}$$

Wenn wir die Verlust- und Gewinnterme zusammen nehmen erhalten wir.

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\Delta N}{d^3 v_1} = \int\int (-f_1 f_2 + f_1' f_2') |v_1 - v_2| \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega d^3 v_2 \tag{6.7}$$

Für den Stoßterm wird hier über den differentiellen Wirkungsquerschnitt integriert. Bei Coloumb-Streuung bekommt man kein endliches Integral. Deshalb wird für die Kinetik bei Coloumb-Streuung, eine Entwicklung gemacht unter der Annahme das ein Stoß die Verteilungs-Funktion nur geringfügig ändert, sprich Kleinwinkel-Streuung. Dies führt damit zur Fokker-Planck-Gleichung.
Im Gleichgewicht haben wird gefordert, daß die Verteilungsfunktion sich nicht ändern soll. Daraus folgt, daß:

$$f_1' f_2' - f_1 f_2 = 0 \tag{6.8}$$

oder

$$\ln f_1' + \ln f_2' = \ln f_1 + \ln f_2 \tag{6.9}$$

Diese Gleichung läßt sich lösen durch den Ansatz einer Maxwell-Verteilung. Setzen wir

$$f \sim e^{-\alpha m v^2} \tag{6.10}$$

so ergibt obige Gleichung

$$v_1'^2 + v_2'^2 = v_1^2 + v_2^2 \tag{6.11}$$

dies entspricht der Energieerhaltung

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

6.2 Verteilungsfunktion im Einfluß äußerer Felder

6.2.1 2-Term Näherung

Bei der Abweichung vom Gleichgewicht macht man prinzipiell den Ansatz dass die Störung klein ist. In vielen Fällen hat man im System zudem eine Vorzugsrichtung vorliegen, z.B. durch die Ausrichtung des elektrischen Feldes, das die Ladungsträger beschleunigt. Dies wird in der sog. **2 Term Näherung** berücksichtigt. Man unterteilt die Verteilungsfunktion in einen isotropen Anteil f_0 und einen anisotropen Anteil f_1 gemäß Abb.6.2.

$$f(\vec{v}) = f_0(|v|) + \frac{v_z}{v} f_1(|v|) \tag{6.12}$$

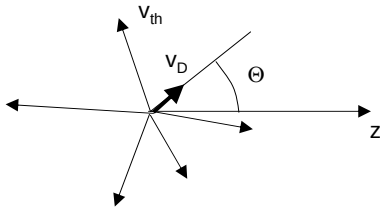


Abbildung 6.2: Anisotroper Anteil in der Verteilungsfunktion durch z.B. überlagerte Driftgeschwindigkeit v_D

d.h. die Richtungsinformation steckt jetzt in dem Vorfaktor des anisotropen Anteils, während die Anteile der Verteilungsfunktion f_0 und f_1 Funktionen eines Skalars werden. Die Form von f_0 und f_1 ist in Abb.6.3 verdeutlicht. Mit $\cos\Theta = \frac{v_z}{v}$ kann man schreiben:

$$f(\vec{v}) = f_0(|v|) + \cos\Theta f_1(|v|) \tag{6.13}$$

Je nach Winkel Θ unter dem die Verteilungsfunktion betrachtet wird ergibt sich eine andere Form. Betrachtet man die Verteilungsfunktion für $\Theta = 0$, d.h. in Richtung des äußeren elektrischen Feldes so sieht man die komplett verschobene Verteilungsfunktion $f_0 + f_1$. Betrachtet man die Verteilungsfunktion für Richtungen senkrecht zum elektrischen Feld $\Theta = \pi/2$, so bemerkt man keine Änderung und bekommt nur f_0. Dies ist in Abb. 6.4 verdeutlicht. Betrachten wir jetzt Stöße der Elektronen mit Neutralgasteilchen, die durch eine Verteilungsfunktion f_g charakterisiert werden. f_g ändert sich durch

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

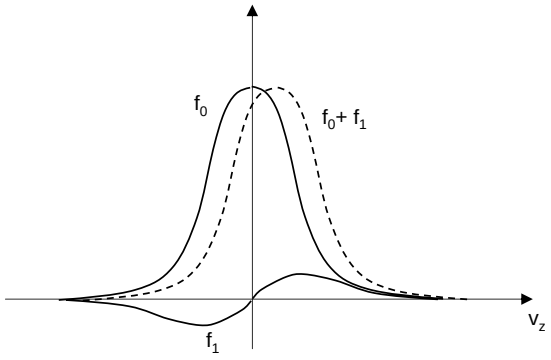


Abbildung 6.3: Isotroper Anteil f_0 und anisotroper Anteil f_1 der Verteilungsfunktion

Stöße in erster Näherung nicht, da wegen des Massenunterschiedes der Impulsübertrag gering ist, d.h. $f_g = f_g'$. In dieser Näherung ergibt sich z.B. der Stossterm wie folgt:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{Stoesse} = \int\int (f_1 f_g - f_1' f_g)|v| \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega d^3 v_g \tag{6.14}$$

Hier geht ein, daß die Verteilungsfunktion der Schwerteilchen sich nicht ändert und daß deren Geschwindigkeit sehr viel kleiner als die der Elektronen ist. In 2-Term Näherung wird dadurch:

$$(f_1' f_g - f_1 f_g)|v| = (f_0 f_g - f_0 f_g)|v| + f_1 f_g v_z' - f_1 f_g v_z = f_1 f_g (v_z' - v_z) \tag{6.15}$$

Hierbei wurde benutzt, daß der Betrag der Geschwindigkeit gleich bleibt beim Stoß. D.h. es gilt $v' = v$ und $f_0' = f_0$ und $f_1' = f_1$. Allerdings ändert sich die Richtung durch den Stoßprozeß und es gilt:

$$v_z' = v_z \cos\Theta \tag{6.16}$$

damit wird aus dem Stossterm:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{Stoesse} = \underbrace{\int f_g d^3 v_g}_{n_g} \underbrace{\int f_1 (\cos\Theta - 1)|v|}_{-v(1-\cos\Theta)} \underbrace{\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}_{\sigma} \tag{6.17}$$

Der Term auf der rechten Seite ist schon bekannt. Er entspricht der Stoßfrequenz für Impulsübertrag ν_m, gekennzeichnet durch den Faktor $(1 - \cos\Theta)$. Damit wird:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

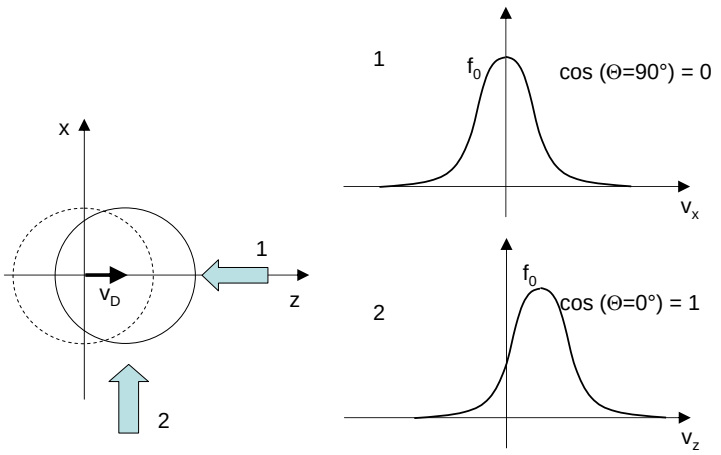


Abbildung 6.4: Isotroper Anteil f_0 und anisotroper Anteil f_1 der Verteilungsfunktion. Je nach Richtung die betrachtet wird, trägt der anisotrope Anteil zu f bei.

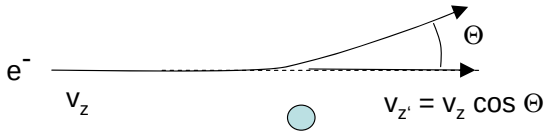


Abbildung 6.5: Änderung der z-Komponente durch einen Stoßprozeß.

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{Stoesse} = -\nu_m f_1} \tag{6.18}$$

d.h. der anisotrope Anteil der Verteilungsfunktion zerfällt durch Stöße. Sprich durch das Einschalten der Stöße wird das Gleichgewicht angestrebt und die Verteilungsfunktion f_0 erreicht.

6.2.2 Boltzmann-Gleichung in 2 Term Näherung

Betrachten wir jetzt die Boltzmann-Gleichung für Elektronen für eine ausgewählte Richtung z im eindimensionalen:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_z \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{eE_z}{m}\frac{\partial f}{\partial v_z} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{Stoesse} \tag{6.19}$$

In diese Gleichung kann man jetzt die 2-Term Näherung einsetzen; f wird zu:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \cos\Theta \frac{\partial f_1}{\partial t} + ... \tag{6.20}$$

bzw.

$$v_z = v\cos\Theta \tag{6.21}$$

Anschließend wird die Gleichung entweder mit $\sin\Theta$ oder $\sin 2\Theta$ multipliziert und von 0 bis π integriert. Durch diese Art der Mittelung über den Raum wird der symmetrische bzw. antisymmetrische Anteil der Gleichung separiert und eine Bilanzgleichung für den Anteil f_0 bzw. f_1 der Verteilungsfunktion erzeugt:

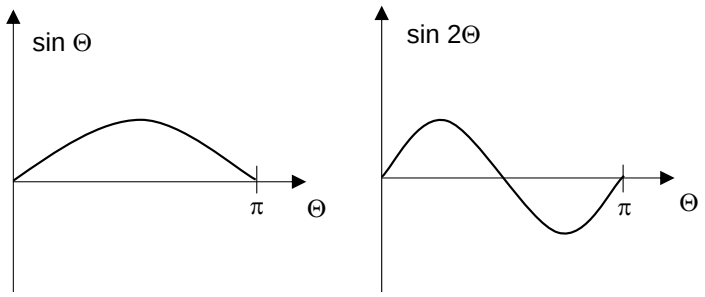


Abbildung 6.6: Integration mit den Faktoren $\sin\Theta$ und $\sin 2\Theta$ ergeben Ratengleichungen für den isotropen und anisotropen Anteil.

- **symmetrischer Anteil** f_0

  Nach dem Einsetzen der Variablensubstitution von Gl. 6.20 und 6.21 in Gl. 6.19 und der entsprechenden Integration über $\sin\Theta d\Theta$ bleiben folgende Terme übrig:

$$\int_0^\pi \frac{\partial f_0}{\partial t}\sin\Theta + \int_0^\pi \cos\Theta\sin\Theta\frac{\partial f_1}{\partial t} + ... = 2\frac{\partial f_0}{\partial t} + 0 + ... \tag{6.22}$$

  Es entsteht somit eine Bilanzgleichung für f_0

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{1}{3} v \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{e\vec{E}_z}{m} \frac{1}{3v^2} \frac{\partial v^2 f_1}{\partial v} = 0 \tag{6.23}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird nur dann Null, wenn sich die isotrope Verteilungsfunktion durch z.B. Stöße mit Schwerteilchen nicht ändern kann. Dies gilt nur für eine Masse $M \to \infty$ der Schwerteilchen. Bei endlicher Masse entsteht auf der rechte Seite von Gl. 6.23 aus dem Stoßterm hingegen:

$$\frac{m}{m+M} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^3 \nu_m \left(f_0 + \frac{k_B T}{mv} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) \right] \tag{6.24}$$

Auch dieser Term muß zu Null werden, wenn die isotrope Verteilungsfunktion f_0 eine Maxwell-Verteilung ist, da beliebige Stoßprozesse immer zu einer Maxwell-Verteilung im Gleichgewicht führen. Dies ist erfüllt, wenn die rechte Seite zu Null wird bzw. wenn gilt:

$$f_0 = -\frac{k_B T}{mv} \frac{\partial f_0}{\partial v} \tag{6.25}$$

Dies ist eine Differentialgleichung für f_0. Die einfache Lösung zeigt sofort, daß die Abhängigkeit $f_0 \propto e^{mv^2/kT}$ diese Bedingung erfüllt.

- **antisymmetrischer Anteil** f_1

  Als zweite Variante wird die Gleichung 6.19 mit $\sin 2\Theta$ multipliziert und von 0 bis π integriert, um eine Ratengleichung für f_1 zu erhalten. Als erste Terme bleiben jetzt übrig

$$\int_0^\pi \frac{\partial f_0}{\partial t} \sin 2\Theta + \int_0^\pi \cos\Theta \sin 2\Theta \frac{\partial f_1}{\partial t} + ... = 2\frac{\partial f_1}{\partial t} + 0 + ... \tag{6.26}$$

  Daraus resultiert eine Gleichung für die zeitliche Entwicklung des anisotropen Anteils.

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_0}{\partial z} - \frac{e\vec{E}_z}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} = -\nu_m f_1 \tag{6.27}$$

  Man erkennt, daß der anisotrope Anteil f_1 durch drei Terme geändert wird: (i) durch eine Strömung im Ortsraum gemäß $\frac{\partial f_0}{\partial z}$ bei der Teilchen aus benachbarten Phasenraumelementen in das Phasenraumelement von f_1 hineinfliessen; (ii) durch eine Beschleunigung bzw. Abbremsung gemäß einem elektrischen Feld E_z; (iii) bzw. der Verlust an Anisotropie durch Stoßprozesse gemäß einer Stoßfrequenz ν_m.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Transportgrößen

Für die Beschreibung von Plasmen ist es oftmals zweckmäßig die komplexe Variation im Ortsraum durch ein einfacheres Fluidmodell zu beschreiben, während die Heizprozesse in Plasmen und damit der Energieinhalt besser mit einem kinetischen Modell erfasst werden. Die Ortsabhängigkeit der Form der Verteilungsfunktion wird dabei vernachlässigt (siehe lokale Näherung unten). Für der Ankopplung des kinetischen Modells an das Fluidmodell, ist die Ableitung der Transportgrößen Beweglichkeit und Diffusionskonstante des Fluidmodells aus der mikroskopischen Beschreibung im kinetischen Modell wichtig.
Beweglichkeit und Diffusionskonstante lassen sich aus der Formulierung der Boltzmanngleichung in 2-Term Näherung ableiten. Der Teilchenfluß in eine Richtung ist gegeben durch den anisotropen Anteil in der Verteilungsfunktion. Dies läßt sich zeigen aus:

$$j = \int v f d^3v = \int v \left(f_0 + \frac{v_z}{v} f_1 \right) d^3v \tag{6.28}$$

Die Terme proportional zu f_0 mitteln sich heraus und wir erhalten

$$j_z = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty v_z f_1 v^2 dv \tag{6.29}$$

Hier kommt 4 πv^2 von der Kugelschale und der Term 1/3 von der Berücksichtigung von nur einer Richtung. D.h. der gerichtete Teilchenfluß wird nur von dem anisotropen Teil der Verteilungsfunktion bestimmt. Die Ratengleichung für den anisotropen Teil ist durch Gl. 6.27 gegeben. Im stationären Fall ergibt sich

$$f_1 = -\frac{1}{\nu_m} \left(v \frac{\partial f_0}{\partial z} - \frac{e}{m} E_z \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) \tag{6.30}$$

damit ergibt sich für den Teilchenfluss

$$j = -\frac{4\pi}{3} \frac{1}{n} \int_0^\infty v^4 \frac{f_0}{\nu_m} dv \frac{\partial n}{\partial z} + \frac{4\pi e}{3mn} \int \frac{v^3}{\nu_m} \frac{\partial f_0}{\partial v} n E_z dv \tag{6.31}$$

aus dem Vergleich für den Elektronenfluss im Fluidbild mit:

$$j = -D \nabla n - \mu n E_z \tag{6.32}$$

ergibt sich:

$$\boxed{D = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{n} \int \frac{v^4}{\nu_m} f_0 dv} \tag{6.33}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

und

$$\boxed{\mu = -\frac{4\pi e}{3mn}\int \frac{v^3}{\nu_m}\frac{\partial f_0}{\partial v}dv} \tag{6.34}$$

Diese Gleichungen sind wichtig, um aus der geschwindigkeitsabhängigen Stoßfrequenz die Transportgrößen Diffusion D und Beweglichkeit μ zu bestimmen.
Eine typische hybride Plasmamodellierung entsteht durch folgende Sequenz: (i) zunächst wird die Verteilungsfunktion für das gesamte Plasma aus der Boltzmanngleichung in 2-Term-Näherung bestimmt; (ii) dann werden aus der Lösung die Transportgrößen μ und D ermittelt, wobei die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Stoßfrequenz zu berücksichtigen ist; (iii) schließlich wird aus dem Fluidmodell mit diesen Transportparametern, die räumliche Verteilung der Elektronendichte bestimmt. Nachdem allerdings auch die Transportkoeffizienten von den Teilchendichten abhängen, kann man eine selbstkonsistente Lösung erzwingen, indem die Schritte (i) bis (iii) bis zur Konvergenz iteriert werden.

Schwerteilchenstöße, Druyvesteyn-Verteilung

Wir betrachten jetzt den Fall der Form der Verteilungsfunktion unter der Annahme von Schwerteilchenstößen. Aus der Ratengleichung des anisotropen Anteils 6.27 erhalten wir:

$$f_1 = \frac{eE_z}{m\nu_m}\frac{\partial f_0}{\partial v} \tag{6.35}$$

hierbei wurde die räumliche Ableitung $\frac{\partial f_0}{\partial z}$ zu Null gesetzt. Dies entspricht der sog. **lokalen Näherung**, d.h. die Form der Verteilungsfunktion ändert sich nicht mit dem Ort in der Entladung, und die Betrachtung in einem Phasenraumelement gilt für die ganze Entladung. Diese Näherung basiert auf der Vorstellung, daß der Energietransport in einer Entladung viel effizienter als der Teilchentransport erfolgt. D.h. es existieren Gradienten in der Teilchendichte entsprechend einem Diffusionsprofil, während die Temperaturverteilung bzw. genauer die Verteilung im Geschwindigkeitsraum räumlich konstant ist. Diese lokale Näherung ist allerdings oft nur unzureichend gültig. Alternativ läßt sich allerdings eine **nicht-lokale Näherung** definieren. Diese geht davon aus, daß in einem Plasma in dem die Elektronen lange freie Weglängen haben, die Gesamtenergie als Summe aus potentieller Energie $e\Phi(x)$ und kinetischer Energie $\frac{1}{2}mv^2(x)$ konstant bleibt. D.h. das Potential $\Phi(x)$ und die Geschwindigkeit $v(x)$ dürfen sich *räumlich* ändern aber der Ausdruck

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$E = e\Phi(x) + \frac{1}{2}mv(x)^2 \tag{6.36}$$

bleibt konstant. Mit dieser Annahme lassen sich Bilanzgleichungen für die Verteilungsfunktion $f(v)$ umformen in Bilanzgleichungen für $f(E)$ bei denen die Ortsableitung wieder entfällt. Nach der Lösung des Problems für $f(E)$, läßt sich die Ortsabhängigkeit $f(v(x))$ über das einsetzen des Potentials $\Phi(x)$ direkt ableiten.
Für die Ableitung der Verteilungsfunktion bei Stößen mit schweren Teilchen, benutzen wir Gleichung 6.23 und erhalten:

$$-\frac{eE_z}{m}\frac{1}{3v^2}\frac{\partial}{\partial v}v^2 f_1 = 0 \tag{6.37}$$

Dies galt für die Näherung unendlich massereicher Schwerteilchen. Bei Teilchen endlicher Masse in lokaler Näherung und mit $m \ll M$ und $T = 0$ erhält man stattdessen:

$$-\frac{eE_z}{m}\frac{1}{3v^2}\frac{\partial}{\partial v}v^2 f_1 = -\frac{m}{M}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(v^3\nu_m f_0\right) \tag{6.38}$$

damit ergibt sich:

$$f_1 = -\frac{3m^2}{eE_z M}v\nu_m f_0 \tag{6.39}$$

Aus Gleichungen 6.35 und 6.39 erhält man:

$$\frac{\partial f_0}{\partial v} = -\frac{m\nu_m}{eE_z}\frac{3m^2}{eE_z M}v\nu_m f_0 = -\frac{3m^3}{eE_z^2 M}v\nu_m^2 f_0 \tag{6.40}$$

Dies ergibt eine Lösung der Form:

$$f_0 \propto exp\left[-\frac{3m^3}{eE_z^2 M}\int_0^v v'\nu_m^2 dv'\right] \tag{6.41}$$

Unter der Annahme, daß die Stoßfrequenz

$$\nu_m = n_g\sigma v \tag{6.42}$$

ist, ergibt sich eine Verteilungsfunktion der Form

$$\boxed{f_0 \propto exp[-\alpha v^4]} \tag{6.43}$$

Dies bezeichnet man als **Druyvesteyn Verteilung**. Der Verlauf unterschiedlicher Verteilungsfunktionen ist in Abb. 6.7 illustriert.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Es ist zu beachten, daß die Form der Verteilungsfunktion nicht zwingend die Dominanz eines Prozesses bedingt. Zum Beispiel führt Ionisation oberhalb einer bestimmten Schwelle zu einem Abknicken der Verteilungsfunktion bei höheren Elektronen-Energien, die Form von f_0 ähnelt daher der einer Druyvesteyn-Verteilung, obwohl der Mechanismus nicht die Schwerteilchenstöße sind. Im umgekehrten Fall kann es sein, daß die Verteilungsfunktion bei hohen Energien stärker besetzt ist im Vergleich zur Maxwell-Verteilung. Dies durch spezielle Heizmechanismen (Wellenheizung, γ Effekt, super-elastische Stöße...) verursacht sein.
Um die Mannigfaltikeit der Verteilungsfunktionen zu charakterisieren wird oftmals eine parametrisierte Version der Verteilungsfunktion benutzt.

$$f_0 \propto exp\left[-\left(\frac{E}{k_B T}\right)^n\right] \tag{6.44}$$

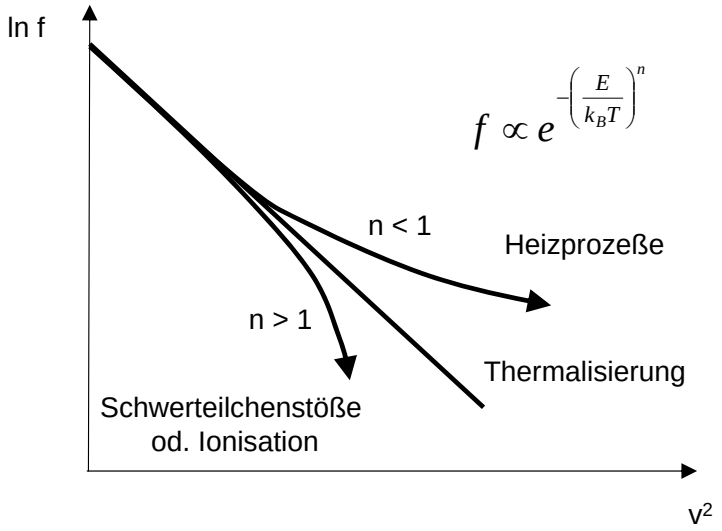


Abbildung 6.7: Mannigfaltigkeit der Verteilungsfunktion

Zeitabhängige E Felder

Anhand dieser Betrachtung kann man schließlich noch die Änderung der Verteilungsfunktion durch zeit-abhängige elektrische Felder diskutieren. Da ein elektrisches Feld jetzt oszilliert gemäß $E_z \sin \omega t$, oszilliert auch der anisotrope Teil der Verteilungsfunktion (Abb.6.8). In lokaler Näherung erhält man wieder:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

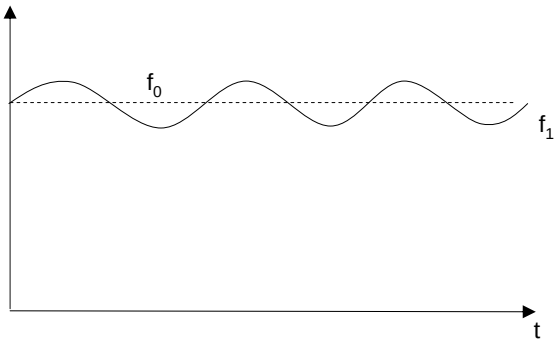


Abbildung 6.8: Isotroper Anteil f_0 und anisotroper Anteil f_1 der Verteilungsfunktion bei zeitlich modulierten Feldern.

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{eE_z}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} = -\nu_m f_1 \tag{6.45}$$

im Fourier-Raum folgt daraus mit $f_1 \to f_1 e^{i\omega t}$ und $E_z \to E_z e^{i\omega t}$:

$$f_1 = \frac{eE_z}{m(i\omega + \nu_m)}\frac{\partial f_0}{\partial v} \tag{6.46}$$

Der Realteil ergibt:

$$f_1 = -\frac{eE_z}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v}\frac{\nu_m}{(\omega^2 + \nu_m^2)} \tag{6.47}$$

Für den Fall von Stößen mit Neutralteilchen endlicher Masse ergibt sich aus Gleichung 6.23:

$$-\frac{eE_z}{m}\frac{1}{3v^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^2 f_1) = -\frac{m}{M}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^3 \nu_m f_0) \tag{6.48}$$

dies vereinfacht sich wieder zu:

$$f_1 = -\frac{3m^2}{eE_z M} v\nu_m f_0 \tag{6.49}$$

Die Verteilungsfunktion ist demnach wieder:

$$f_0 \propto exp\left[-\frac{3m^3}{e^2 E_z^2 M}\int_0^v v'[\omega^2 + \nu_m^2]dv'\right] \tag{6.50}$$

Für $\omega \gg \nu_m$ ergibt sich die Maxwell-Verteilung, da die Stöße mit den Schwerteilchen nicht maßgeblich sind. und für $\omega \ll \nu_m$ ergibt sich die Druyvesteyn-Verteilung weil Schwerteilchenstöße dominieren. Aus diesem Ansatz kann

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

man sich auch die Abhängigkeit der sich ausbildenden Temperatur im Plasma erschließen. Damit eine Temperatur Sinn macht, muß die Geschwindigkeitsverteilung einer Maxwell-Verteilung entsprechen.
Für den Exponenten muß damit gelten, unter der Annahme daß ν_m nicht von der Geschwindigkeit abhängt.:

$$-\frac{1}{2}mv^2\frac{1}{k_BT_e} = -\frac{3m^3}{e^2E_z^2M}\frac{1}{2}v^2[\omega^2+\nu_m^2] \tag{6.51}$$

oder

$$k_BT_e = \frac{e^2E_z^2M}{3m^2}\frac{1}{[\omega^2+\nu_m^2]} = \frac{e^2M}{3m^2}\left[E_z\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\nu_m^2}}\right]^2 \tag{6.52}$$

letzteres beschreibt das effektive Feld:

$$E_{eff} = E_z\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\nu_m^2}} \propto \frac{1}{\omega} \tag{6.53}$$

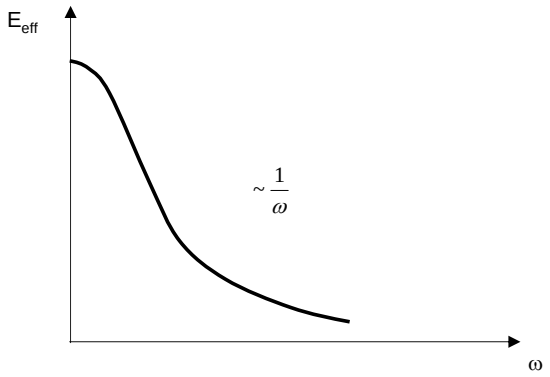


Abbildung 6.9: Das effektive elektrische Feld sinkt mit steigender Frequenz.

d.h. bei höheren Frequenzen wird die Beschleunigung der Elektronen ineffektiver. Dies ist erklärlich, da bei HF-Feldern, die Elektronen in einem Zyklus beschleunigt und wieder abgebremst werden. Ist die Frequenz sehr hoch können die Elektronen dieser Frequenz nicht mehr folgen und das Heizen wird ineffektiv.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

6.3 Kinetische Wellendämpfung, Landau Dämpfung

Bislang hatten wir die Einfluss von elektrischen Feldern auf die Verteilungsfunktion betrachtet um die Phänomene wie Wellen-Heizung und die Anisotropie der Verteilungsfunktion durch Driften etc,. zu beschreiben. Als letztes Beispiel wollen wir stoßfreie Dämpfung einer Plasma-Welle beschreiben der sog. **Landau-Dämpfung**. Jetzt entwickeln wir die Verteilungsfunktion wieder in einen isotropen Anteil und eine Störung.

$$f = f_0 + f_1 \tag{6.54}$$

Dies eingesetzt in die Vlasov-Gleichung unter Vernachlässigung nicht-linearer Terme (z.B. $E_1 f_1$) und in lokaler Näherung ($\nabla f_0 = 0$) ergibt sich:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v\nabla f_1 - \frac{eE_1}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} = 0 \tag{6.55}$$

im Fourier-Raum ergibt dies:

$$-i\omega f_1 + vikf_1 = \frac{e}{m}E_1\frac{\partial f_0}{\partial v} \tag{6.56}$$

aus der Poisson-Gleichung ergibt sich:

$$\epsilon_0 \nabla E_1 = -en_1 = -e\int f_1 d^3v \tag{6.57}$$

oder

$$\epsilon_0 ikE_1 = -e\int f_1 d^3v \tag{6.58}$$

Zusammen gibt das folgende Integro-Differentialgleichung:

$$1 = -\frac{e^2}{km\epsilon_0}\int \frac{\frac{\partial f_0}{\partial v}}{\omega - kv} d^3v \tag{6.59}$$

Man erhält schließlich eine Lösung für ω der Form[1]:

$$\boxed{\omega = \omega_p\left[1 + i\frac{\pi}{2}\frac{\omega_p^2}{k^2}\left[\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v}\right]_{v_\Phi}\right]} \tag{6.60}$$

[1] $\hat{f}_0$ bringt zum Ausdruck, daß hier die Verteilungsfunktion auf 1 normiert sein soll.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

D.h. die Welle wird gedämpft, wenn der Gradient der Verteilungsfunktion bei v_Φ negativ ist (siehe Kapitel Instabilitäten). Hierfür ist der Abschnitt der Verteilungsfunktion bei der Phasengeschwindigkeit v_Φ der Welle wichtig. Die Dämpfung ist um so größer je größer die Steigung am Ort der Phasen-Geschwindigkeit. Die physikalische Ursache ist in Abb. 6.10 und 6.11 verdeutlicht:

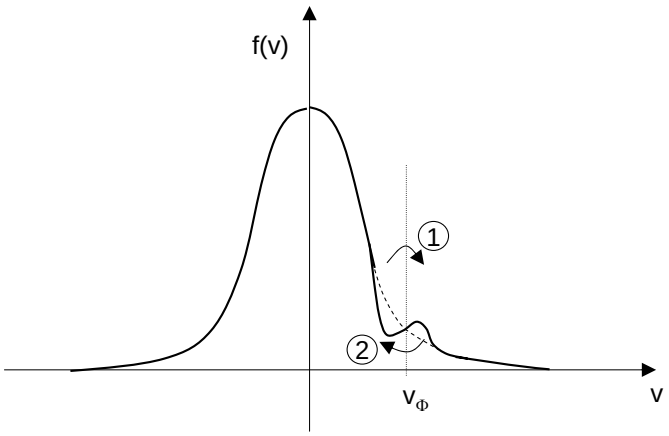


Abbildung 6.10: Änderung der Verteilungsfunktion am Ort der Phasen-Geschwindigkeit v_Φ einer Welle.

Falls die Geschwindigkeit der Elektronen in der Nähe der Phasen-Geschwindigkeit liegt, können die Elektronen der Potential-Änderung folgen und in das Potential-Minimum der Welle geschoben werden, d.h. langsamere Elektronen werden leicht beschleunigt und schnellere werden abgebremst. Bei einer fallenden Verteilungsfunktion bedeutet dies, das Netto mehr Elektronen beschleunigt als abgebremst werden, d.h. es wird Netto Energie von der Welle auf die Elektronen-Geschwindigkeit übertragen und damit die Welle gedämpft. Falls allerdings die Verteilungsfunktion der Elektronen bei der Phasengeschwindigkeit eine positive Steigung hat, wird Energie aus der Bewegung der Elektronen in die Welle übertragen und sie wird exponentiell verstärkt.
Man bezeichnet diese Dämpfung der Welle als stoßfreie Dämpfung bzw. als **Landau-Dämpfung**.
Die Beschleunigung von Elektronen im Geschwindigkeitsraum durch das Dämpfen einer Plasma-Welle ist äquivalent zur Beschleunigung von Elektronen durch von extern eingestrahlte E-Felder in Form von elektromagnetischer Strahlung. Prominentes Beispiel ist die Beschleunigung von Ladungs-

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

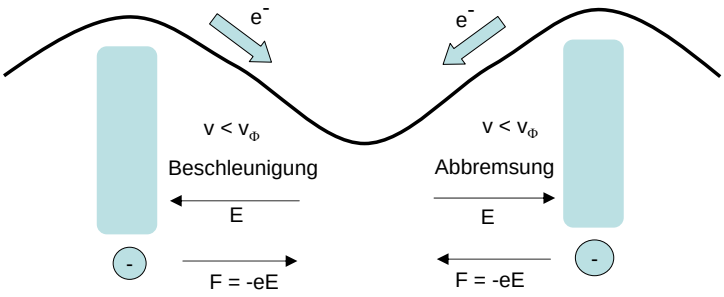


Abbildung 6.11: Schematische Darstellung der Beschleunigung (Anteil 1) und Abbremsung (Anteil 2) von Elektronen, die sich mit fast genau der Phasen-Geschwindigkeit einer Welle bewegen.

trägern durch intensive Laserpulse. Gemäß der Gruppen-Geschwindigkeit eines intensiven Laserpulses, der durch ein Plasma geschickt wird, werden die Elektronen auf hohe Energie gebracht. Dies bezeichnet man als **wake-field (=Kielwasser) Beschleunigung**.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Kapitel 7

Der Plasmarand

Bei der Erzeugung von Plasmen auf der Erde entsteht automatisch eine Begrenzung des Plasmas zu einer Oberfläche des Vakuumgefässes. Dieser Übergang zwischen Plasma und Oberfläche hat eine komplexe Struktur, da die Quasineutralität des Plasmas trotz der unterschiedlichen Beweglichkeiten von Ionen und Elektronen gewährleistet sein muß; es bildet sich am Rand eine Raumladungszone, die Randschicht. Diese Randschicht kann unterschiedliche Formen und Ausdehnungen annehmen, je nach Betriebsbedingungen des Plasmas. Die Beschreibung dieser Randschicht ist von zentraler Bedeutung für Anwendungen der Plasmatechnik bei denen der Teilchenfluß auf eine Oberfläche, die prozessiert werden soll, maßgeblich ist.

7.1 Randschicht

Gegeben sei ein quasineutrales Plasma vor einer Oberfläche. Diese Oberfläche sei nicht geerdet. Da die Elektronen sehr viel beweglicher sind, verlassen sie das Plasma am Rand. Dadurch wird lokal die Quasineutralität verletzt und ein Randschicht-Potential bildet sich aus, daß dem Verlust der Elektronen entgegenwirkt. Es stellt sich ein neues Gleichgewicht ein. In dieser Randschicht ist die Elektronendichte sehr viel kleiner als die Ionendichte, wie in Abb.7.1 illustriert:
An dieser Stelle läßt sich gut illustrieren, daß es drei Arten von elektrischen Feldern in einem Plasma gibt:

- **Mikrofeld**: Das Mikrofeld ist ein fluktuierendes kleines elektrisches Feld, daß durch die statistische Bewegung der Ladungsträger in der

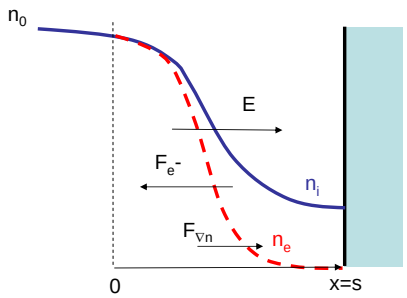


Abbildung 7.1: Verlauf der Ladungsträgerdichte in der Randschicht

Umgebung eines gegebenen Atoms oder Moleküls herrscht. Es ist wichtig für die Absorptions- und Emissionseigenschaften angeregter Atome und Moleküle.

- **ambipolares Feld**: Falls ein Gradient in der Plasmadichte vorliegt, können Elektronen und Ionen nur gleichzeitig diffundieren, da sonst die Quasineutralität verletzt würde. Das ambipolare Feld baut sich auf, daß die unterschiedlichen Beweglichkeiten von Ionen und Elektronen kompensiert, indem die Ionen beschleunigt und die Elektronen abgebremst werden.

- **Feld der Randschicht**: Beim Übergang zu einer Oberfläche bildet sich das elektrische Feld der Randschicht aus, um dem Verlust an Elektronen an der Oberfläche entgegen zu wirken.

7.1.1 Raumladungszone

Zunächst gilt die Energieerhaltung für die Ionen gemäß:

$$\frac{1}{2}Mv_i^2(x) + e\Phi(x) = \frac{1}{2}Mv_0^2 \tag{7.1}$$

v_0 ist die Geschwindigkeit mit der Ionen in diese Raumladungszone eintreten. Daneben gilt Strom-Erhaltung:

$$n_i(x)v_i(x) = n_0 v_0 \tag{7.2}$$

aufgelöst ergibt sich mit $E_0 = \frac{1}{2}Mv_0^2$:

$$n_i(x) = n_0\left(1 - \frac{2e\Phi(x)}{Mv_0^2}\right)^{-1/2} = n_0\left(1 - \frac{e\Phi(x)}{E_0}\right)^{-1/2} \tag{7.3}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Für die Beschreibung der Elektronendichte wird wieder die Boltzmann-Beziehung bemüht:

$$n_e(x) = n_0 e^{\frac{e\Phi(x)}{k_B T_e}} \tag{7.4}$$

Beides in die Poisson-Gleichung eingesetzt ergibt:

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = e\frac{n_0}{\epsilon_0}\left[\exp\left(\frac{e\Phi(x)}{k_B T_e}\right) - \left(1 - \frac{e\Phi(x)}{E_0}\right)^{-1/2}\right] \tag{7.5}$$

Diese Gleichung entspricht einer Differentialgleichung für den Potentialverlauf $\Phi(x)$ in der Randschicht. Allerdings läßt sich diese transzedente Gleichung nur numerisch lösen.
Es läßt sich allerdings eine Abschätzung für den Bereich der Randschicht bei $x \sim 0$ wie folgt ableiten. Zunächst wird die Gleichung mit $\frac{d\Phi(x)}{dx}$ multipliziert und über x integriert. Auf der linken Seite entsteht

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{d\Phi(x)}{dx}\frac{d^2\Phi(x)}{dx}dx &= \\
\int_0^x \frac{d\Phi(x)}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d\Phi(x)}{dx}dx &= \\
\int_0^x \frac{d\Phi(x)}{dx}d\left(\frac{d\Phi(x)}{dx}\right) &= \\
\frac{1}{2}\left(\frac{d\Phi(x)}{dx}\right)^2 &
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Auf der rechten Seite entsteht

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{d\Phi(x)}{dx}e\frac{n_0}{\epsilon_0}\left[exp\left(\frac{e\Phi(x)}{k_B T_e}\right) - \left(1 - \frac{e\Phi(x)}{E_0}\right)^{-1/2}\right]dx &= \\
\int_{\Phi(0)}^{\Phi(x)} e\frac{n_0}{\epsilon_0}\left[exp\left(\frac{e\Phi(x)}{k_B T_e}\right) - \left(1 - \frac{e\Phi(x)}{E_0}\right)^{-1/2}\right]d\Phi &
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Damit erhält man mit der Integration über Φ unter der Annahme daß $\Phi(0) = \frac{d\Phi}{dx}\big|_{x\sim 0}$=0:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\Phi(x)}{dx}\right)^2 = \frac{en_0}{\epsilon_0}\left[k_B T_e e^{\frac{e\Phi(x)}{k_B T_e}} - k_B T_e + 2E_0\left(1 - \frac{e\Phi(x)}{E_0}\right)^{1/2} - 2E_0\right] \tag{7.8}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Diese Gleichung fordert für sinnvolle Lösungen, daß die rechte Seite größer als Null wird.
Im Bereich $x \simeq 0$ gilt sowohl $e\Phi \ll k_B T_e$ als auch $e\Phi \ll E_0$. Damit läßt sich eine interessante Relation ableiten, wenn man die rechte Seite bis in die zweite Ordnung entwickeln:

$$k_B T_e \left(1 + \frac{e\Phi}{k_B T_e} + \frac{1}{2}\left(\frac{e\Phi}{k_B T_e}\right)^2\right) - k_B T_e + \tag{7.9}$$

$$2E_0 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{e\Phi}{E_0} - \frac{1}{8}\left(\frac{e\Phi}{E_0}\right)^2\right) - 2E_0 \leq 0 \tag{7.10}$$

Dieser Term muß größer gleich Null sein. Deshalb läßt sich folgern:

$$\frac{1}{2}\frac{(e\Phi)^2}{k_B T_e} - \frac{1}{4}\frac{(e\Phi)^2}{E_0} > 0 \tag{7.11}$$

mit $E_0 = \frac{1}{2} M v_0^2$ ergibt sich als Bedingung für die Anfangsgeschwindigkeit v_0:

$$\boxed{v_0 > \sqrt{\frac{k_B T_e}{M}} = v_B} \tag{7.12}$$

Dies bezeichnet man als **Bohm-Geschwindigkeit**. Dies ist ein wichtiges Ergebnis, da es eine Randbedingung vorgibt für den Strom an Ionen der das Plasma verläßt. Damit läßt sich auch einfach der energetische Teilchenfluß auf eine gegebene Oberfläche abschätzen. Durch die Beschleunigung der Ionen in der Randschicht besitzen sie automatisch eine Vorzugsrichtung. Während die Richtung der Ionen im Volumen isotrop verteilt ist, so führt die unidirektional Beschleunigung in der Randschicht zu einer sehr engen Winkelverteilung. D.h. die Ionen treffen nur senkrecht auf die Oberfläche auf. Dies ist von fundamentaler Bedeutung für die Anisotropie des Plasmaätzens in der Plasmatechnik: bei der Strukturierung eines Grabens auf einem Siliziumwafer werden chemische Ätzreaktionen durch das Ionenbombardement getrieben. D.h. nur auf dem Boden des Grabens treffen die gerichtete Ionen auf und nur dort ist die Ätzrate hoch. An den Seitenwänden des Grabens hingegen ist der auftreffende Ionenfluß gering die Ätzrate klein.

7.1.2 Vorschicht

Bei der Beschreibung der Raumladungszone sind wir von der Energieerhaltung der Ionen ausgegangen und haben eine Randbedingung, die Bohm-Geschwindigkeit gefunden, die für das Eintreten der Ionen in diese Rand-

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

schicht erfüllt sein muß. Daran schließt sich natürlich die Frage an, wie die Ionen auf diese Geschwindigkeit gebracht werden.

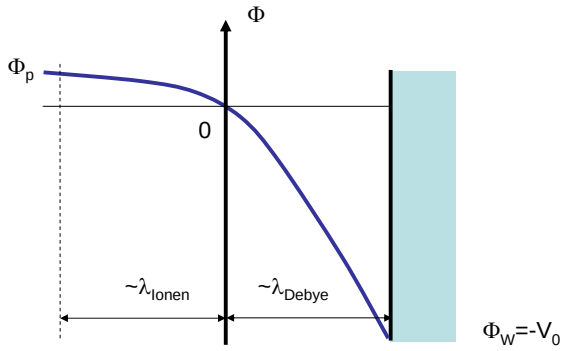


Abbildung 7.2: Potentialverlauf in Vorschicht und Randschicht

Die Beschleunigung der Ionen auf die Bohm-Geschwindigkeit geschieht in der sogenannten **Vorschicht** (Abb.7.2). In dieser muß Quasineutralität herrschen:

$$n_i(x) = n_e(x) \tag{7.13}$$

daraus läßt sich ableiten:

$$\frac{1}{n_i(x)}\frac{dn_i(x)}{dx} = \frac{1}{n_e(x)}\frac{dn_e(x)}{dx} \tag{7.14}$$

mit $j_i = n_i e v_i(x)$ ergibt sich:

$$\frac{1}{n_e(x)}\frac{dn_e(x)}{dx} = \frac{ev_i(x)}{j_i(x)}\frac{d}{dx}\frac{j_i}{ev_i(x)} = \frac{1}{j_i(x)}\frac{dj_i(x)}{dx} - \frac{1}{v_i(x)}\frac{dv_i(x)}{dx} \tag{7.15}$$

mit der Boltzmann-Beziehung für die Elektronen erhält man schließlich:

$$\frac{1}{v_i(x)}\frac{dv_i(x)}{dx} + \frac{e}{k_B T_e}\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{1}{j_i(x)}\frac{dj_i(x)}{dx} \tag{7.16}$$

in der Vorschicht muß immer gelten daß die lokale Ionengeschwindigkeit $v_i(x)$ kleiner als die Bohm-Geschwindigkeit v_B ist. Deshalb entsteht aus Gl. 7.16 die Ungleichung gemäß:

$$\frac{1}{v_B}\frac{dv_i(x)}{dx} + \frac{e}{k_B T_e}\frac{d\Phi}{dx} < \frac{1}{j_i}\frac{dj_i}{dx} \tag{7.17}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Diese Gleichung kann durch mehrere Bedingungen erfüllt sein:

- **Ionenreibung**: Bei Stromerhalt ($\frac{dj_i(x)}{dx} = 0$) muß die linke Seite ist explizit kleiner als 0 werden. Dies kann erreicht werden, wenn die Geschwindigkeitszunahme der Ionen durch Ionenreibung vermindert wird. d.h. die Änderung in $v_i(x)$ ist nicht äquivalent zu einer Änderung in $\Phi(x)$.
- **Geometrie, Kontraktion:** durch geometrische Effekte kann die Stromdichte mit dem Eindringen in die Randschicht größer werden. z.B. ist $\frac{dj_i}{dx} > 0$ bei einer zylindrischen Anordnung.
- **Ionisation:** der Strom durch die Vorschicht kann Zunehmen durch die Annahme von zusätzlicher Ionisation. Auch hier gilt dann $\frac{dj_i}{dx} > 0$.

Man erkennt, daß Stoßprozesse, seien es Reibung oder Ionisation, für die Ausbildung der Vorschicht in dem Plasma wesentlich sind. Damit kann man sofort schließen, daß die Ausdehnung der Vorschicht von der Größenordnung der freien Weglänge der Ionen sein muß. Für die Beschreibung des Plasmarandes hat man damit zwei dominante aber stark unterschiedliche Skalen: die freie Weglänge der Ionen für die Vorschicht im Bereich typischerweise mehrere cm, und die Debyelänge für die Raumladungszone typischerweise im Bereich mm bis μm.

7.2 Floating potential, Plasma potential

Durch die Verletzung der Quasineutralität in der Randschicht baut sich eine Potentialdifferenz auf. Wenn wir die Ladungsträgerdichte an der Kante der Randschicht mit n_0 bezeichnen, kann man die Ströme bestimmen, die auf die Oberfläche einfallen. Der Ionenstrom ist gegeben durch den Bohm-Fluss:

$$\Gamma_i = n_0 v_B \tag{7.18}$$

und der Elektronenfluss, der auf die Oberfläche trifft, entspricht dem gerichteten Fluß aus dem Volumenelement direkt vor der Oberfläche. Wenn der Ort der Oberfläche mit $x = s$ bezeichnet wird and dem ein Potential Φ_W herrscht bekommt man mittels der Boltzmanrelation ($n(x = s) = n(x = 0) exp\left(\frac{e\Phi_W}{k_B T}\right)$):

$$\Gamma_e = \frac{1}{4} n(x = s) v_{e,th} = \frac{1}{4} n_0 v_{e,th} e^{\frac{e\Phi_W}{k_B T_e}} \tag{7.19}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Für den Fall ein sog. **floatenden** Oberfläche, (d.h. die Oberfläche ist nicht geerdet) muß $\Gamma_e = \Gamma_i$ gelten woraus folgt:

$$n_0 v_B = \frac{1}{4} n_0 v_{e,th} e^{\frac{e\Phi_W}{k_B T_e}} \tag{7.20}$$

$$\left(\frac{k_B T_e}{M}\right)^{1/2} = \frac{1}{4}\left(\frac{8 k_B T_e}{\pi m}\right)^{1/2} e^{\frac{e\Phi_W}{k_B T_e}} \tag{7.21}$$

Damit ergibt sich für das sog. **floating Potential**:

$$\boxed{\Phi_W = -\frac{k_B T_e}{e} \ln\left(\frac{M}{2\pi m}\right)^{1/2}} \tag{7.22}$$

Auch zwischen der Randschichtkante und dem Plasma-Volumen muß ein Potential abfallen in dem die Ionen auf die Bohm-Geschwindigkeit gebracht werden. Dies läßt sich einfach ableiten aus:

$$\frac{1}{2} M v_B^2 = e\Phi_P \tag{7.23}$$

Daraus ergibt sich das sogenannte **Plasmapotential**

$$\Phi_P = \frac{k_B T_e}{2e} \tag{7.24}$$

Alle Potentiale sind hier bezüglich der Schichtkante definiert ($v_i = v_B$). Die gesamte Potential-Differenz zwischen Plasmapotential und einer externen Experimentmasse eines Plasmareaktors, beinhaltet die gesamte Randschichtspannung.

7.3 Randschichten mit angelegter Spannung

Bei technischen Plasmen ist die Energie der auftreffenden Ionen ein wesentlicher Parameter. Prozesse wie die Zerstäubung (das physikalische Herausschlagen von Atomen aus einem Festkörper durch Impulsübertrag) hängen in detaillierter Weise von der Energie der Projektile ab. Durch die Ausbildung des elektrischen Feldes in der Randschicht, treffen die Ionen zudem senkrecht auf die Oberfläche. Dies ist wesentlicher Bestandteil des anisotropen Ätzens, bei der die Ätzchemie zugleich von dem isotropen Fluß an neutralen Ätzspezies (Fluoratome, Sauerstoffatome etc.) aber auch von dem anisotropen Fluß an energetischen Ionen abhängt. Die Richtung der Ionen gibt die Ätzrichtung der Mikro-Struktur vor. Dies ist in der Halbleitertechnik

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

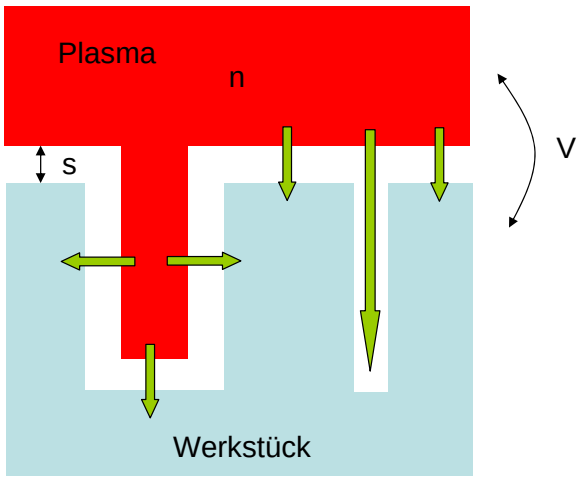


Abbildung 7.3: Der Zusammenhang zwischen Randschichtspannung V, Plasmadichte n und Randschichtdicke s bestimmt das Eindringen von Plasmen in Hohlräumen.

bei der Herstellung von elektronischen Bauelementen wie Speicherzellen ganz wesentliche.
Um die Energie der Ionen zu variieren wird eine beliebige Potentialdifferenz durch das Anlegen einer negativen Spannung erzeugt. Mit der externen Spannungsquelle läßt sich das elektrische Feld in der Randschicht ändern und so die Beschleunigung der Ionen anpassen. In der Plasmatechnik hat man allerdings oftmals das Problem, daß Hohlräume oder Gräben zu beschichten oder zu ätzen sind: bei der Beschichtung von Zahnrädern ist die Beschichtung der Flanken erwünscht, während beim anisotropen Plasmaätzen das Ätzen der Seitenwände eines Grabens unerwünscht sind. Die Anisotropie bzw. Isotropie des Plasmaprozesses hängt davon ab, ob das Plasma in einen Hohlraum eindringen kann oder nicht, wie in Abb. 7.3 verdeutlicht. Bei gegebener Randschichtspannung V, Plasmadichte n wird sich eine Dicke der Randschicht s als charakteristische minimale Längenskala einstellen. Abb. 7.3 verdeutlicht, daß nur der linke Hohlraum von Plasma erfüllt ist und nur dort die Ionen auch die Seitenwände erreichen.
Für die Bewertung des Eindringens von Plasmen in kleine Hohlräume benötigen wie als einen Zusammenhang zwischen der Dicke der Randschicht s, der Randschichtspannung V und der Plasmadichte n. Dieser Zusammenhang hängt stark von den Annahmen ab, die für die Ausbildung der Randschicht gemacht werden. Man unterscheidet die Matrix-Schicht, die Child-

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Langmuir-Schicht und stoßbestimmte Randschichten.

7.3.1 Matrix-Schicht

Bei Plasma-Prozessen wird oftmals eine Spannung explizit an eine Elektrode angelegt. Dabei entsteht ein hoher Spannungsabfall über die Randschicht. Diese hohe Spannung drängt die Elektronen weiter zurück und beschleunigt die Ionen sehr stark. In der einfachsten Näherung kann man die Verletzung der Quasineutralität in der Randschicht als Stufen-Funktion beschreiben. Beschreibt man die Ionendichte als konstant in der Randschicht, spricht man von der sog. **Matrix-Schicht** (Abb. 7.4).

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{\epsilon_0} e n_0 \tag{7.25}$$

$$E(x) = \frac{1}{\epsilon_0} e n_0 x \tag{7.26}$$

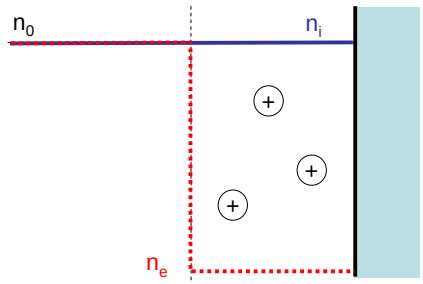


Abbildung 7.4: Verlauf der Ladungsträgerdichte in der Matrix-Randschicht

daraus folgt für den Potentialverlauf:

$$\Phi(x) = -\frac{e}{\epsilon_0} n_0 \frac{1}{2} x^2 \tag{7.27}$$

mit $\Phi(s) = -V$ ergibt sich

$$s = \left(\frac{2\epsilon_0 V}{e n_0}\right)^{1/2} = \lambda_D \left(\frac{2eV}{k_B T_e}\right)^{1/2} \tag{7.28}$$

In praktischen Einheiten ergibt sich eine Randschichtdicke von:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$s[\mathrm{cm}] = 1052 \left(\frac{V[\mathrm{V}]}{n[\mathrm{cm}^{-3}]} \right)^{1/2} \tag{7.29}$$

Dieses Ergebnis zeigt, daß die Randschicht viele Debye-Längen dick sein kann. Bei der Beschreibung der Matrix-Schicht wurde die Beschleunigung der Ionen in dem elektrischen Feld vernachlässigt. Diese Beschleunigung würde bei der Annahme von Stromerhalt ($j_0 = n(x)v(x)$) dazu führen, daß die Dichte der Ionen zur Oberfläche hin abnehmen muß. Die Matrix-Schicht ist ein gutes Modell für die Beschreibung der **Plasma-Ionen-Immersions-Implantation PIII** bei der ein negativer Hochspannungspuls an ein Werkstück angelegt wird. Dadurch werden die Elektronen schnell in das Plasma zurückgedrängt, während die Ionen dem Puls zunächst nicht folgen können; die Matrix-Schicht bildet sich aus. In dieser Matrix-Schicht durchlaufen die Ionen dann das elektrische Feld und werden mit hohen Energien in das Werkstück implantiert.
Der Vorteil dieses gepulsten Vorgehens ist der Umstand, daß die Dicke der Randschicht im Vergleich zu einer dauerhaft anliegenden Spannung (Child-Langmuir-Schicht, siehe unten) sehr viel dünner sein kann. D.h. bei gegebener Plasmadichte n und Spannung V, kann ein Hohlraum *noch* gefüllt werden, während die Randschichtdicke s in einem gleichförmig betriebenen Plasma größer wäre.

7.3.2 Child-Langmuir-Schicht

Die Annahme einer konstanten Ionendichte in der Randschicht ist nur gültig wenn Stöße in der Randschicht der Beschleunigung der Ionen entgegen wirken. Im Fall einer stoss-freien Randschicht wird die Ionendichte allerdings mit zunehmender Beschleunigung geringer, wie in Abb. 7.5 illustriert. Als Ansatz ergibt sich:

$$\frac{1}{2} M v^2(x) = -e\Phi(x) \tag{7.30}$$

Hier haben wir v_0 vernachlässigt, da die Ionen in der Randschicht stark beschleunigt werden und ihre Anfangs-Energie gemäß v_0 von untergeordneter Bedeutung ist. Die Stromerhaltung liefert:

$$en(x)v(x) = j_0 \tag{7.31}$$

Aus Gl. 7.30 und 7.31 ergibt sich:

$$n(x) = \frac{1}{e} j_0 \left(-\frac{2e\Phi(x)}{M} \right)^{-1/2} \tag{7.32}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

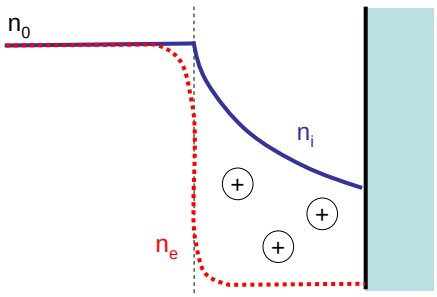


Abbildung 7.5: Verlauf der Ladungsträgerdichte in der Child-Langmuir Randschicht

Damit ergibt die Poisson-Gleichung:

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = -\frac{j_0}{\epsilon_0}\left(-\frac{2e\Phi(x)}{M}\right)^{-1/2} \tag{7.33}$$

An dieser Stelle wird die Elektronendichte in der Randschicht vernachlässigt. Dies ist eine gute Näherung bei hoher Randschicht-Spannung, da die Elektronen effektiv in das Plasmavolumen zurückgedrängt werden.
Mit Multiplikation mit $\frac{d\Phi(x)}{dx}$ und Integration über x liefert:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 = 2\frac{j_0}{\epsilon_0}\left(\frac{2e}{M}\right)^{-1/2}(-\Phi)^{1/2} \tag{7.34}$$

Bei der Integration wurden die Randbedingungen ausgenutzt, dass $\Phi(0) = 0$ und $\left.\frac{d\Phi(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0$. Daraus ergibt sich für $\Phi(s) = -V$

$$\boxed{j_0 = \frac{4}{9}\epsilon_0\left(\frac{2e}{M}\right)^{1/2}\frac{V^{3/2}}{s^2}} \tag{7.35}$$

Dies entspricht dem Raumladungs-begrenzten Strom nach dem **Child-Langmuir-Gesetz** ($V^{3/2}$-Gesetz). Mit der Bedingung

$$j_0 = en_0v_B \tag{7.36}$$

kann man auch wieder einen Ausdruck für die Randschichtdicke s ableiten zu:

$$s = \frac{\sqrt{2}}{3}\lambda_D\left(\frac{2eV}{k_BT_e}\right)^{3/4} \tag{7.37}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Diese Beziehungen stellen eine Verknüpfung zwischen der Teilchendichte n_0, der Dicke der Randschicht s, der Temperatur der Elektronen T_e und der angelegten Spannung V dar. Der Vergleich zur Matrix-Schicht zeigt, daß die Ausdehnung der Child-Langmuir-Schicht größer ist. Durch die Abnahme der Ionendichte gemäß der Beschleunigung, muß die Ausdehnung der Raumladungszone bzw. größer sein damit dieselbe Ladungsmenge denselben Spannungshub bewerkstelligt. In praktischen Einheiten läßt sich die Randschichtdicke berechnen zu:

$$s[\mathrm{cm}] = 590 \frac{(V[\mathrm{V}])^{3/4}}{(T_e[\mathrm{eV}])^{1/4} \, (n[\mathrm{cm}^{-3}])^{1/2}} \tag{7.38}$$

Für einen gegebenen Plasmaprozeß läßt sich die Ausdehnung der Randschicht abschätzen, um zu entscheiden, in wie weit ein Plasma in die Öffnung eines Werkstückes eindringen kann oder nicht. Diese Abhängigkeiten lassen sich illustrieren wie:

- Mit steigender Spannung nimmt die Randschichtdicke zu.
- mit steigender Elektronendichte bei gegebener Randschichtspannung nimmt die Randschichtdicke ab.
- mit steigender Elektronentemperatur nimmt die Randschichtdicke ab.

Für die praktische Anwendung ist allerdings der genaue quantitative Zusammenhang wesentlich. Dieser hängt allerdings von der Annahme ab ob man Stöße der Ionen in der Randschicht vernachlässigen darf oder nicht.

7.3.3 Stoß-bestimmte Randschicht

Bislang sind wir von einer Randschicht ausgegangen bei der sich die Geschwindigkeit der Ionen gemäß der Energieerhaltung erhöht. Stöße der Ionen in der Randschicht wurden vernachlässigt. Der andere Grenzfall ergibt sich bei der Annahme, daß Stöße in der Randschicht die Geschwindigkeit begrenzen, wie es durch die Beweglichkeit ausgedrückt wird. Zunächst gilt Flusserhaltung in der Randschicht.

$$n_i(x) v_i(x) = n_0 v_B \tag{7.39}$$

aber die Geschwindigkeit wird durch

$$v_i(x) = \mu E \tag{7.40}$$

Die Beweglichkeit ist gegeben als:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\mu = \frac{e}{m\nu_m} \tag{7.41}$$

mit $\nu_m = n_g \sigma v$. Für die Beschreibung der Stoßfrequenz ist die Geschwindigkeit wichtig. Hier kann man zwei unterschiedliche Ansätze wählen: (i) bei einem hohen Druck ist die Stoßfrequenz durch die thermische Geschwindigkeit gegeben (ii) bei kleinem Druck und großen freien Weglängen ist die Geschwindigkeit eher die Driftgeschwindigkeit. Diesen beiden Fälle ergeben:

- **konstante freie Weglänge λ = const.**

  Bei niedrigem Druck ist die freie Weglänge $\lambda = 1/n_g\sigma$ konstant und für die Stoßfrequenz setzen wir direkt $\nu_m = n_g \sigma v$. Die Beweglichkeit wird zu:

$$v_i(x) = \mu E = \frac{e}{M\nu_m} E = \frac{e\lambda}{M v_i(x)} E \tag{7.42}$$

  Daraus folgt für eine geschwindigkeits-unabhängige freie Weglänge:

$$v_i(x) = \left(\frac{e\lambda}{M} E(x) \right)^{1/2} \tag{7.43}$$

  Es ergibt sich die Ionendichte:

$$n_i(x) = \frac{v_B}{v_i(x)} n_0 = v_B n_0 \left(\frac{e\lambda}{M} E(x) \right)^{-1/2} \tag{7.44}$$

  Dies wird in die Poisson-Gleichung eingesetzt unter Vernachlässigung der Elektronendichte in der Randschicht:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{e}{\epsilon_0} n_0 v_B \left(\frac{e\lambda}{M} E(x) \right)^{-1/2} = \frac{1}{\epsilon_0} j_0 \left(\frac{e\lambda}{M} E \right)^{-1/2} \tag{7.45}$$

  Als Stromdichte erhält man:

$$j_0 = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{3} \right)^{3/2} \epsilon_0 \left(\frac{2e\lambda}{\pi M} \right)^{1/2} \frac{V^{3/2}}{s^{5/2}} \tag{7.46}$$

  Man erkennt, daß die Skalierung ganz ähnlich dem Child-Langmuir Gesetz ist. Nur die Abhängigkeit mit der Randschichtdicke ist etwas anders, da die Ionendichte im Vergleich zum freien Fall nicht so

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

schnell sinken kann. Ein weiterer Vergleich zeigt zudem, daß die stoßbestimmten Randschicht gleich der Child-Langmuir-Schicht multipliziert mit $(\lambda/s)^{1/2}$ ist. D.h. der Raumladungs-begrenzte Strom wird nur dann reduziert, wenn die freie Weglänge kleiner als die Raumladungszone wird.

In praktischen Einheiten ergibt sich eine Randschichtdicke unter der Annahme eines Wirkungsquerschnittes $\sigma = 10^{-19}m^2$ für Ionen-Neutralteilchen-Stöße von:

$$s[\mathrm{cm}] = 277\frac{1}{(p[\mathrm{Pa}]T_e[\mathrm{eV}])^{1/5}}\frac{(V[\mathrm{V}])^{3/5}}{(n[\mathrm{cm}^{-3}])^{2/5}} \tag{7.47}$$

- **konstante Beweglichkeit ν_m = const.**

  Bei hohem Druck wird die Stoßfrequenz unabhängig von der Geschwindigkeit und die Beweglichkeit eine Konstante. Man bekommt somit:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{j_0}{\epsilon_0}\mu^{-1}E^{-1} \tag{7.48}$$

  Dies löst sich zu:

$$j_0 = \frac{9}{8}\epsilon_0\mu\frac{V^2}{s^3} \tag{7.49}$$

Die mittlere Geschwindigkeit, die man zur Bestimmung von μ bzw. ν_m benutzt kann die thermische Geschwindigkeit sein. Dies gilt insbesondere bei hohem Druck und vielen Stößen.
Man erkennt, daß je nach Randbedingung und Vorannahme, der Zusammenhang zwischen Potential, Spannung und Schichtdicke unterschiedlich ist. Demnach vielfältig sind auch die Modelle zur Beschreibung von Niedertemperaturplasmen, die im nächsten Kapitel behandelt werden.

7.4 Sonden-Messungen

Die Ströme durch eine Randschicht auf eine Oberfläche hängen vom Potential dieser Oberfläche ab und von der Elektronentemperatur gemäß der Bohm-Geschwindigkeit. D.h. durch das Aufnehmen einer Strom-Spannungs-Charakteristik sollte es möglich sein Information über die Verteilungsfunktion der Ladungsträger und deren Dichte zu bekommen. Diesen Umstand nutzt eine Sonden-Messung aus:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

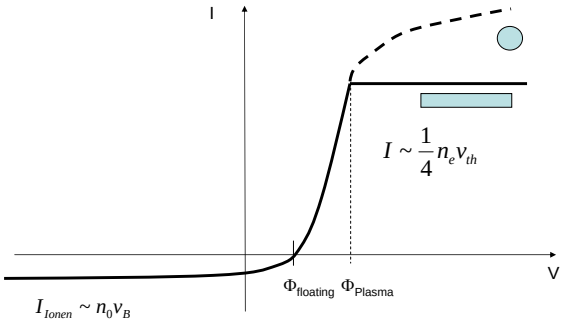


Abbildung 7.6: Sondenkennlinie

Drei Bereiche in der Strom-Spannungs-Charakteristik lassen sich unterscheiden (Sonde sei planar) (siehe Abb. 7.6).

- **Ionensättigungsstrom**

  Bei stark negativer Vorspannung der Oberfläche werden die Elektronen zurück gedrängt und der Strom wird im wesentlichen von den Ionen getragen. Aus diesem Bereich wird im allgemeinen die Ladungsträgerdichte bestimmt. Die Stromdichte ist gegeben durch.

$$j_{\text{Ionen}} = -en_0 v_B \tag{7.50}$$

- **Anlaufbereich**

  Bei mittleren Spannungen werden die Elektronen nicht mehr vollständig zurückgedrängt und der Elektronenstrom kann den Ionenstrom kompensieren (dies entspricht dem floating potential) oder die Elektronen werden nicht mehr zurückgedrängt (dies entspricht dem Plasmapotential). Der Strom ist proportional zu

$$j_{\text{e}} = \frac{1}{4} en_0 v_{e,th} \exp\left(\frac{eV - e\Phi_P}{k_B T_e}\right) \tag{7.51}$$

  Der Gesamtstrom den die Sonde sieht ist natürlich der Ionenstrom plus der Elektronenstrom, d.h. um den Elektronenstrom korrekt zu bestimmen muß im Anlaufbereich der Ionenstrom noch abgezogen werden.

- **Elektronen-Sättigungsstrom**

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Bei Spannungen oberhalb des Plasmapotentials werden alle Elektronen aufgesammelt und man erhält als Strom

$$j_e = \frac{1}{4} e n_0 v_{e,th} \tag{7.52}$$

Im Allgemeinen kann man aus dem Anlaufbereich nicht nur die Elektronentemperatur bestimmen sondern natürlich auch die Verteilungsfunktion der Elektronen. Mit zunehmender Spannung V werden immer weniger Elektronen zurückgedrängt. Demnach trägt aus dem Geschwindigkeitsraum der Elektronen ein immer größeres Volumen im Phasenraum zum Strom bei:

$$j_e = e \int_{v_{min}}^{\infty} v^2 f(v) dv \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\Theta_{min}} \underbrace{v \cos\Theta}_{z-Projektion} \sin\Theta d\theta \tag{7.53}$$

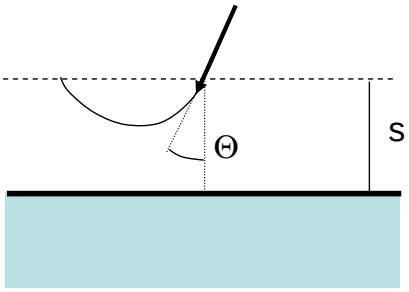


Abbildung 7.7: Die Randschicht als Geschwindigkeitsfilter der einfallenden Ionen od. Elektronen

Die Verknüpfung von Azimuthal-Winkel und minimaler Geschwindigkeit ist:

$$\cos\Theta_{min} = \frac{v_{min}}{v} \tag{7.54}$$

Damit ergibt sich:

$$j = e\pi \int_{v_{min}}^{\infty} v^3 \left(1 - \frac{v_{min}^2}{v^2}\right) f(v) dv \tag{7.55}$$

Wir betrachten jetzt die Verteilungsfunktion nicht als Funktion der Geschwindigkeit sondern als abhängig von der Energie ϵ mit

$$\epsilon = \frac{1}{2} m v^2 \tag{7.56}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Desweiteren betrachten wir die minimale Geschwindigkeit v_{min} ausgedrückt durch die Potentialdifferenz V, die zwischen Sonde und Plasma ($V = \Phi_p - V_{Sonde}$) abfällt und die die Elektronen mit Geschwindigkeiten kleiner als v_{min} zurück hält. Durch diese Koordinatentransformation erhält man:

$$I = \frac{2\pi e^3}{m^2} A \int_V^\infty \epsilon \left(1 - \frac{eV}{\epsilon}\right) f(\epsilon) d\epsilon \tag{7.57}$$

Die Ableitung nach der Potentialdifferenz V ergibt:

$$\frac{dI}{dV} = -\frac{2\pi e^3}{m^2} A \int_V^\infty f(\epsilon) d\epsilon \tag{7.58}$$

beziehungsweise:

$$\frac{d^2 I}{dV^2} = \frac{2\pi e^3}{m^2} A f(\epsilon) \tag{7.59}$$

D.h. die zweite Ableitung der Kennlinie ist direkt proportional zur Verteilungsfunktion der Elektronen. In der Praxis wird diese Bestimmung der Verteilungsfunktion erschwert durch die Notwendigkeit (i) den Ionenstrom vom gemessenen Gesamtstrom abzuziehen , (ii) das Plasmapotential zu bestimmen, (iii) der Bildung der zweiten Ableitung bei verrauschten Daten.
Neben diesen Aspekten der Auswertung gilt es noch zu beachten, daß oftmals eine kleine zylindrische Sonde gewählt wird, um das Plasma nicht zu stören. Bei einer zylindrischen Sonde allerdings muß man bei der Betrachtung des Elektronen- und Ionenstroms die Drehimpulserhaltung und die Ausdehnung der Randschicht mit steigender negativer oder positiver Spannung der Sonde berücksichtigen. Hier können zwei Fälle unterschieden werden: (i) beim stoßfreien Fall ergeben sich die Ströme aus der OML (orbital motion limited) Theorie, während im Fall mit Stößen in der Randschicht der Strom durch den radialen Transport bestimmen. Diese beiden Fälle sind in Abb. 7.8 illustriert.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

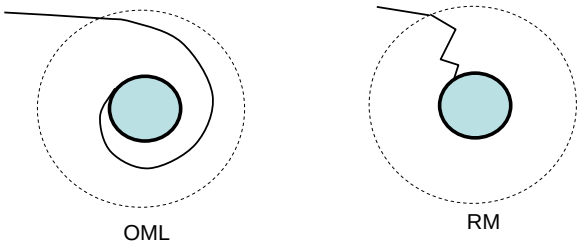


Abbildung 7.8: Orbital-Motion-Limited (OML) Strom, Radial-Motion-Limited (RML) Strom

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Kapitel 8

Anwendung: Niedertemperaturplasmen

Eine prominente Anwendung der Plasmaphysik sind technische Plasmen zur Lichterzeugung, zum Plasmaätzen oder zur Plasmasynthese von dünnen Filmen oder Nanopartikeln. In diesen Niedertemperaturplasmen sind die Elektronentemperaturen in der Regel sehr hoch, während die Ionentemperaturen niedrig sind. Zudem ist der Ionisationsgrad $\ll 1$. Für die Beschreibung dieser Plasmen ist zunächst das Zündkriterium entscheidend, das bestimmt ab wann ein Plasma aufrecht erhalten werden kann. Für den Betrieb des Plasma existieren dann mehrere bevorzugte Konfigurationen, bei denen unterschiedliche Formen von elektrischen Gleich- und Wechselfeldern eingestrahlt werden. Alle diese Entladungsformen haben unterschiedliche Anwendungsgebiete, die sich hinsichtlich der Ladungsträgerdichte und der Skalierbarkeit der Plasmen unterscheiden.

8.1 DC Entladung

8.1.1 Townsend-Entladung - unselbstständige Entladung

Legt man über einen gasgefüllten Zwischenraum eine Spannung an, so können Ladungsträger darin beschleunigt werden und das Gas ionisieren. Bei genügend hoher Spannung kann die Ionisation durch eine Elektronenlawine verstärkt werden. Falls der erste Ladungsträger dieser Lawine durch eine externe Quelle erzeugt werden muß, wie z.B. Höhenstrahlung, Photoeffekt etc.

spricht man von einer **unselbstständigen Entladung**.

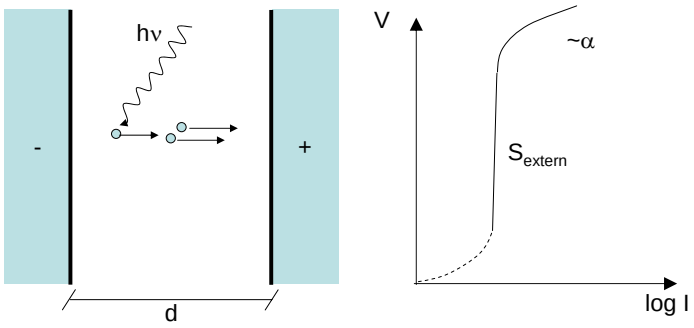


Abbildung 8.1: Townsend-Entladung

Die Zunahme des Stromes über eine Wegstrecke dx bei einem Verstärkungsfaktor α und einem externen Quellterm S ist:

$$d\Gamma = \alpha\Gamma dx + S_{extern}dx \tag{8.1}$$

daraus folgt:

$$\Gamma = S_{\text{extern}}\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1) \tag{8.2}$$

den Koeffizienten α bezeichnet man als **1. Townsend Koeffizient**. Er entspricht der Zahl der Ionisations-Prozesse pro Wegstrecke und Elektron:

$$\alpha = \underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{Stoesse\ \ pro\ Laenge} \underbrace{\exp\left[\frac{E_{Ionisation}}{E_{e^-}}\right]}_{Wahrscheinlichkeit\ fuer\ Ionisation} \tag{8.3}$$

mit der Energie E_{e^-}, die ein Elektron zwischen zwei Stössen aufnehmen kann. Diese ergibt sich aus der Feldstärke $\vec{E}$ und der freien Weglänge λ zu:

$$E_{e^-} = \lambda\vec{E} \tag{8.4}$$

berücksichtigt man zusätzlich, daß die freie Weglänge $\lambda \propto 1/p$ ist, so erhält man

$$\alpha = Ap\exp\left(-B\frac{p}{E}\right) \tag{8.5}$$

mit den Parametern A und B. Bei gegebenem Plattenabstand d und Spannung V mit $E = V/d$ ergibt sich:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\alpha = Ap \exp\left[-B\frac{pd}{V}\right] \tag{8.6}$$

die Elektronen-Vervielfältigung ist demnach eine Funktion des Verhältnisses aus Feldstärke zu Druck bzw. Teilchendichte. Der Wert E/n wird oft in der Einheit *Townsend* Td[$= 10^{-17}$ Vcm^2] angegeben.
Anwendungen dieser Entladung sind Korona-Entladungen für Ladungsgaufbringung in Kopierern oder zur Rauchgasreinigung in Kraftwerken.

8.1.2 Glimmentladung - selbstständige Entladung, Paschenkurve

Für das Zünden einer *selbstständigen* Entladung in einem gasgefüllten Zwischenraum müssen mehrere Bedingung erfüllt sein. Auf einer Strecke, entsprechend der freien Weglänge, müssen die Elektronen so viel Energie aufgenommen haben, dass Ionisation stattfinden kann.

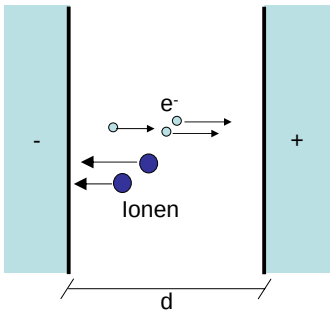


Abbildung 8.2: Zündkriterium

Die Elektronenvervielfältigung sei durch eine Koeffizienten α charakterisiert. Der lokale Elektronenfluss ergibt sich damit zu:

$$\frac{d\Gamma_e}{dx} = \alpha\Gamma_e \tag{8.7}$$

oder

$$\Gamma_e(d) = \Gamma_e(0)e^{\alpha d} \tag{8.8}$$

Die Anzahl der erzeugten Elektronen in dieser Lawine ist:

$$\Gamma_e(d) - \Gamma_e(0) = \Gamma_e(0)e^{\alpha d} - \Gamma_e(0) \tag{8.9}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

bei jeder Ionisation wird natürlich auch eine Ion erzeugt. Dies erfordert daß:

$$\Gamma_i(0) - \Gamma_i(d) = \Gamma_e(d) - \Gamma_e(0) \tag{8.10}$$

Diese Entladung wird selbstständig, wenn die Erzeugung der ersten Elektronen entsprechend zu $\Gamma(0)$ nicht von einer externen Quelle abhängt. Ein möglicher Prozess ist die Erzeugung von Sekundärelektronen durch die auftreffenden Ionen an der Kathode. Die Verknüpfung von Ionenstrom und Erzeugung von Sekundärelektronen läßt sich schreiben als:

$$\Gamma_e(0) = \gamma_i \Gamma_i(0) \tag{8.11}$$

Die Sekundärelektronen, die durch die Elektronen ausgelöst werden, können nicht zur Plasmaerzeugung beitragen, da sie an der *falschen Elektrode* erzeugt werden und somit nicht im Feld beschleunigt werden. Unter der Annahme, daß $\Gamma_i(d) = 0$ kann man somit schreiben:

$$\frac{1}{\gamma_i}\Gamma_e(0) = \Gamma_e(0)e^{\alpha d} - \Gamma_e(0) \tag{8.12}$$

γ bezeichnet man als **zweiten Townsend-Koeffizienten**. Die Gleichung läßt sich reduzieren zu folgender Bedingung für das Zünden einer selbstständigen Entladung:

$$\alpha d = \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \tag{8.13}$$

Bislang wurde α nicht näher spezifiziert. In dem ersten Townsend-Koeffizienten ist die Elektronenvervielfältigung enthalten, die von der freien Weglänge, der Ionisationsenergie und der Feldstärke abhängen sollte. Als Ansatz für α benutzt man:

$$\alpha \propto n_g \exp\left(-\frac{E_{Ionisation}}{\frac{V}{d}\lambda}\right) \tag{8.14}$$

Der Term $\frac{V}{d}\lambda$ beschreibt die Energie, die ein Elektron zwischen zwei Stößen aufnehmen kann. Für den Druck p gilt $n_g \propto p$ und $\lambda \propto p^{-1}$. Damit erhält man:

$$\alpha = Ap \exp\left(-B\frac{pd}{V}\right) \tag{8.15}$$

Dies eingesetzt ergibt

$$Apd \exp\left(-B\frac{pd}{V}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \tag{8.16}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

aufgelöst nach V:

$$\boxed{V = \frac{Bpd}{\ln(Apd) - \ln[\ln(1+\gamma^{-1})]}} \tag{8.17}$$

Diese Gleichung ergibt die sogenannte **Paschen-Kurve**. Für große Werte von pd steigt die Spannung, für die Zündung möglich ist linear mir Bpd an. Im Faktor B ist die Ionisationsenergie enthalten und sie entspricht demnach einem Term der Gasart-abhängig ist.

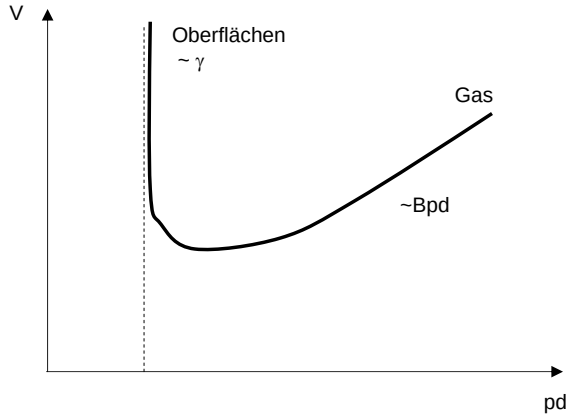


Abbildung 8.3: Paschen-Kurve

Bei kleinen Werten von pd ergibt sich ein minimaler Wert unter dem keine Zündung mehr möglich ist. Diese Grenze wird durch die Bedingung $Apd - \ln(1+\gamma^{-1}) = 0$ festgelegt. Darin enthalten ist der Koeffizient γ, d.h. diese Grenze ist abhängig vom Elektroden-Material.
Eine Glimmentladung kann in mehrere Zonen unterteilt werden:

- **Kathodensaum**

  Der Kathodensaum wird durch Sekundärelektronen erzeugt, die im elektrischen Feld beschleunigt werden. Anfangs haben sie noch niedrige Energien und können Gasatome effektiv zum Leuchten anregen. Bei weiterer Beschleunigung sinkt der Wirkungsquerschnitt und ein Dunkelraum folgt.

- **kathodischer Dunkelraum**

  Im kathodischen Dunkelraum werden die Elektronen stark beschleunigt und ihre Dichte ist demnach noch klein. Dieser Dunkelraum entspricht der Raumladungszone.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

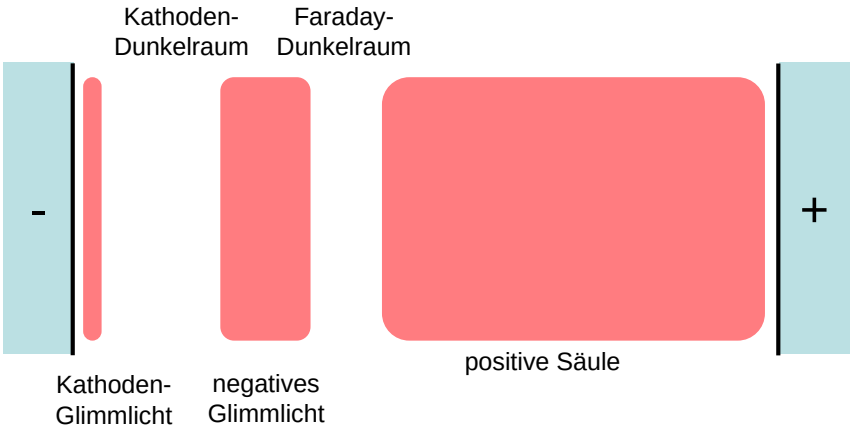


Abbildung 8.4: Regionen der DC Glimm-Entladung

- **negatives Glimmlicht**

  Die Elektronen, die in der Randschicht beschleunigt werden, können durch Gas-Stöße vervielfältigt werden. Irgendwann ist der Elektronenstrom so groß, daß er effektiv zum Anregen der Neutralteilchen ausreicht und das negative Glimmlicht entsteht. Durch diese Lawine ist am Ende des kathodischen Dunkelraumes eine hohe Dichte an Elektronen entstanden, die eine negative Raumladungszone entstehen läßt. Das entsprechende elektrische Feld begrenzt dieses negative Glimmlicht zum Faraday'schen Dunkelraum hin.

- **Faraday'scher Dunkelraum**

  Der Faraday'sche Dunkelraum trennt das negative Glimmlicht von der positiven Säule in der das elektrische Feld sehr klein ist.

- **positive Säule**

  Die positive Säule stellt die Verbindung zwischen den einzelnen Kathodenschichten und der Gegenelektrode dar. Die positive Säule kann beliebig lang sein. Ihre Existenz ist für den Betrieb der Entladung nicht wesentlich.

- **anodischer Dunkelraum**

  Im anodischen Dunkelraum gelten die selben Bedingungen wie im kathodischen Dunkelraum. Er ist weniger stark ausgedehnt, da hier nur eine kleine Spannung abfällt.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

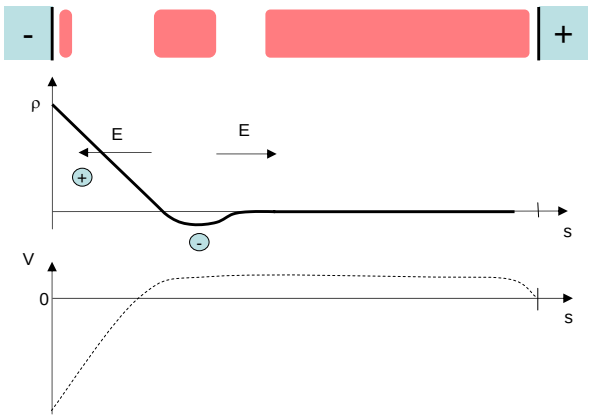


Abbildung 8.5: Raumladungszonen einer DC Entladung

Die Strom-Spannungs-Kennlinien einer DC Glimmentladung läßt sich wie folgt beschreiben. Nimmt man eine Stromquelle an und beobachtet man die sich einstellende Spannung so erhält man die Kennlinie in Abb. 8.7:

- **Townsend-Entladung:**

  Bei kleinen Strömen brennt die Entladung unselbstständig. Um einen höheren Strom fliessen zu lassen, muß die Spannung erhöht werden, um gemäß dem 1ten Townsend Koeffizienten α die Ladungsträgerdichte zu erhöhen.

- **normale Glimmentladung:**

  Die Zündbedingung gemäß der Paschen-Kurve wird erreicht und die Entladung brennt selbständig. Eine Erhöhung des Stromes wird jetzt durch eine Vergrößerung des Plasmas gewährleistet (siehe Abb.8.6).

- **anomale Glimmentladung:**

  Ist die ganze Elektrode ausgefüllt, kann eine weitere Stromerhöhung nur noch durch eine höhere Spannung erzielt werden. Nach dem Child-Langmuir-Gesetz steigt der Strom proportional zu $V^{3/2}$.

- **Bogenentladung:**

  Wird der Strom sehr groß, heizt sich die Oberfläche stark auf und durch thermionische Emission werden neue Ladungsträger gebildet. Der Übergang zu einem Bogenplasma findet statt. Dieses Bogenplasma ist durch einen hohen Strom bei kleiner Spannung charakterisiert.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

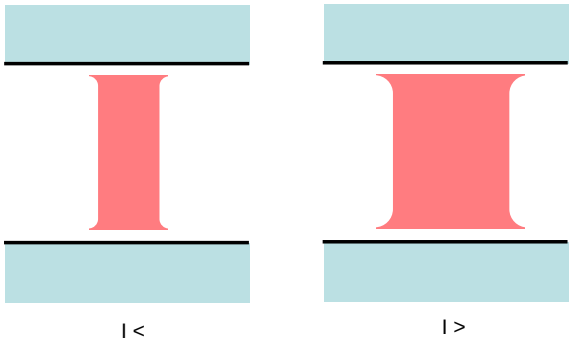


Abbildung 8.6: normale Glimmentladung

Bei dem Übergang zwischen einer unselbstständigen zu einer ständigen Entladung kann man bezüglich des Erscheinungsbilds zwei Typen unterscheiden, den α und den γ-Mode. Diese Unterscheidung bezieht sich auf den wesentlichen Ionisationsmechanismus, der durch die beiden Townsendkoeffizienten charakterisiert ist.

- Bei dem α-Mode wird die Ionisation von den beschleunigten Elektronen im Volumen getragen. Die Leuchtemission in einer Parallelplattenanordnung findet im wesentlichen homogen verteilt zwischen den Platten statt.

- Bei der γ-Mode wird die Ionisation durch Sekundärelektronen an den Elektroden getragen. Diese werden durch das hohen elektrische Feld in der Randschicht in die Entladung injiziert und führen dort zu einer starken Leuchterscheinung direkt vor den jeweiligen Elektroden. Die Leuchtemission in einer Parallelplattenanordnung ist stark inhomogen.

8.1.3 Magnetisch unterstütze DC-Entladung, Magnetronplasmen

Bei einer sog. Magnetronentladung wird die Effizienz der Entladung erhöht indem hinter einer DC Elektrode Magneten angebracht werden. In diesem Magnetfeld sind die Elektronen magnetisiert und können den Feldlinien folgen. Bei geeigneter Geometrie und Magnetfeld werden die Sekundär-Elektronen zunächst in der Randschicht beschleunigt und können dann auf ihrem Gyrationspfad auf einer Elektrode hin- und herpendeln, gemäß Abb.8.8.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

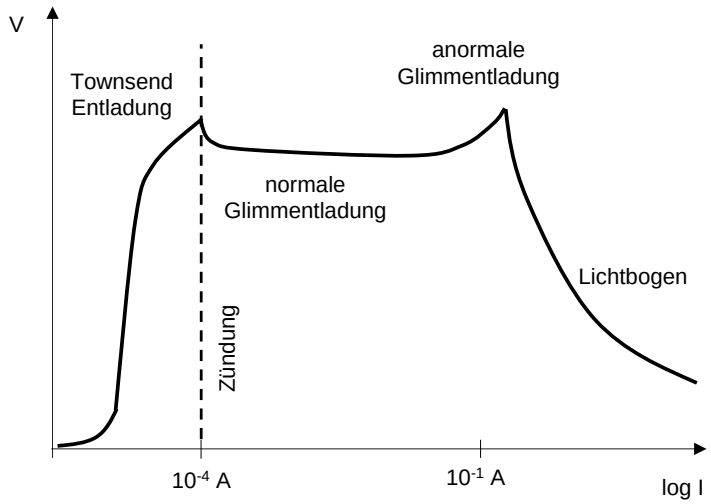


Abbildung 8.7: Kennlinie einer DC Entladung

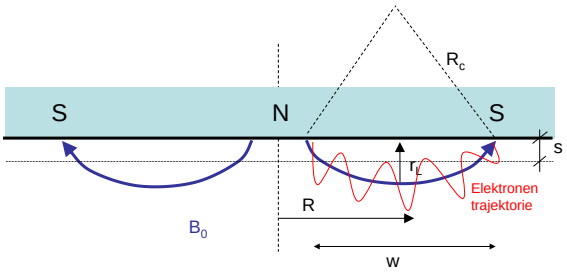


Abbildung 8.8: Geometrie der Magnetron-Entladung

Die Entladung brennt besonders optimal in einer Region, die durch diejenige Feldlinie gegeben ist, deren Krümmungsradius zum Lamor-Radius in einem bestimmten Verhältnis steht. Zunächst werden die Sekundär-Elektronen in der Randschicht beschleunigt. Je nach dem Krümmungsradius der an diesem Ort austretenden Feldlinien, ergibt sich ein unterschiedlicher Lamor-Radius. Ist der Krümmungsradius sehr groß, so bleibt der Lamor-Radius sehr klein. Allerdings trifft die Feldlinien nicht mehr auf die Oberfläche auf und eine Pendelbewegung findet nicht statt. Ist der Krümmungsradius sehr klein, so ist der Lamor-Radius sehr groß und die Elektronen treffen nach einem Umlauf auch nicht mehr auf die Oberfläche auf. Ein Optimum wird erzielt für eine Ausdehnung des Plasmas w (entsprechend der Breite eines Ringes auf einer zylindrischen Elektrode) gemäß Abb. 8.8:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$w \simeq 2(2r_L R_c)^{1/2} \tag{8.18}$$

mit r_L dem Lamor-Radius:

$$r_L = \frac{v_\perp}{\omega_c} \simeq \frac{1}{B_0}\left(\frac{2mV_{dc}}{e}\right)^{1/2} \tag{8.19}$$

Die Zahl an Sekundärelektronen N, die innerhalb einer Pendelbewegung erzeugt werden ergibt sich aus:

$$N = \frac{V}{\epsilon_{ionisation}} \tag{8.20}$$

mit der mittleren Energie, die ein Elektron aufgenommen haben muß, um effektiv einmal zu ionisieren ($\epsilon_{ionisation} \sim 30eV$). Wegen Ladungs-Erhaltung muß die Zahl der Ionen, die Sekundär-Elektronen auslösen und die Zahl der Elektronen, die durch die Pendelbewegung pro Periode entstehen gleich sein. Demnach gilt:

$$1 = \gamma N \tag{8.21}$$

Der Strom über die Randschicht sei wieder durch das Child-Langmuir-Gesetz beschrieben.

8.2 Kapazitiv gekoppelte RF Entladungen

Bei einer DC Entladung ist die Leistungseinkopplung an den ohmschen DC-Strom gebunden, der zwischen den Parallelplatten fließt. Betreibt man dieses System mit Wechselstrom können sehr viel höhere Ladungsträgerdichten erreicht werden (Abb.8.9). Jetzt wird das Plasma im wesentlichen durch den Verschiebungsstrom geheizt und der ohmsche Strom stellt nur einen sehr kleinen Anteil dar.

8.2.1 Spannung

Zur Beschreibung der Spannungscharakteristik einer Hochfrequenz-Entladung (typische Frequenz 13.56 MHz) gehen wir von dem einfachsten Randschicht-Modell, der Matrixschicht, aus. Das Feld in der Raumladungszone berechnet sich zu:

$$\nabla E = \frac{e}{\epsilon_0} n \tag{8.22}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$E(x,t) = \frac{en}{\epsilon_0}\left[x - s_a(t)\right] \tag{8.23}$$

Der Verschiebungs-Strom, der durch die Oszillation der Randschicht zwischen der Elektrode **a** und dem Plasma **p** entsteht (siehe Abb. 8.9), ist gegeben durch:

$$I_{ap} = \epsilon_0 A \frac{\partial E}{\partial t} = -enA\frac{\partial s_a}{\partial t} \tag{8.24}$$

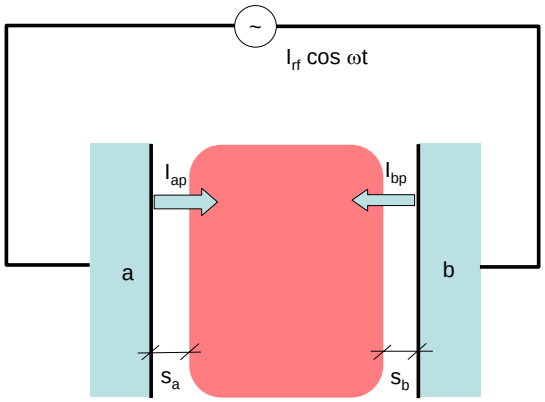


Abbildung 8.9: kapazitive rf Entladung

mit A der Fläche der Elektrode a. Dieser Verschiebungs-Strom muß gleich dem rf Strom im äußeren Stromkreis sein:

$$I_{ap} = I_{rf}\cos\omega t \tag{8.25}$$

Daraus folgt, daß die Dicke der Randschicht durch Integration von Gl. 8.24 sich ergibt zu:

$$s_a(t) = -\underbrace{\frac{I_{rf}}{en\omega A}}_{s_0}\sin\omega t + \bar{s} \tag{8.26}$$

Hier ist $\bar{s}$ die Integrations-Konstante. Die Spannung über die Randschicht **ap** aus Gl. 8.23 ist:

$$V_{ap} = -\frac{e}{\epsilon_0}n\frac{1}{2}s_a^2(t) \tag{8.27}$$

Mit Einsetzen von $s_a(t)$ bekommt man:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$V_{ap} = -\frac{1}{2}\frac{en}{\epsilon_0}(\bar{s}^2 + \frac{1}{2}s_0^2 - 2\bar{s}s_0 \sin\omega t - \frac{1}{2}s_0^2 \cos 2\omega t) \tag{8.28}$$

Analog dazu ist

$$I_{bp} = -enA\frac{\partial s_a}{\partial t} \tag{8.29}$$

Da $I_{ap} = I_{pb} = -I_{bp}$ muß gelten

$$\frac{d}{dt}(s_a + s_b) = 0 \tag{8.30}$$

D.h. die Ausdehnung des Plasmavolumens (Plattenabstand-$(s_a + s_b)$) ändert sich nicht, sondern oszilliert in seiner Position während des rf-Zyklus zwischen den Elektroden hin und her. Es folgt unmittelbar für die Randschicht an Elektrode b:

$$s_b(t) = \underbrace{\frac{I_{rf}}{en\omega A}}_{s_0} \sin\omega t + \bar{s} \tag{8.31}$$

Die Spannung über die Randschicht **bp** ist:

$$V_{bp} = -\frac{1}{2}\frac{en}{\epsilon_0}(\bar{s}^2 + \frac{1}{2}s_0^2 + 2\bar{s}s_0 \sin\omega t - \frac{1}{2}s_0^2 \cos 2\omega t) \tag{8.32}$$

mit

$$V_{rf} = V_{ab} = V_{ap} + V_{pb} = V_{ap} - V_{bp} \tag{8.33}$$

bekommt man die gesamte Spannung, die über das Plasma abfällt zu:

$$V_{rf} = \frac{2e}{\epsilon_0} n\bar{s}\frac{I_{rf}}{en\omega A} \sin\omega t \tag{8.34}$$

Bislang wurde die mittlere Schichtdicke $\bar{s}$ noch nicht spezifiziert. Diese erhält man aus der Bedingung, daß der Elektronenfluss zu einer Oberfläche den Bohmfluß der Ionen kompensieren muß. Dies kann man für den Fall der Matrixschicht nur erreichen, wen man annimmt, daß während eines rf Zyklus die Schicht kurzzeitig kollabiert ($s_a(t) = 0$). D.h. nach Gl. muß gelten:

$$0 = -s_0 + \bar{s} \tag{8.35}$$

Mit dieser Randbedingung ergibt sich der Spannungsabfall über eine Randschicht zu:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$V_{ap} = \frac{e}{2\epsilon_0} n s_0^2 (1 - \sin \omega t)^2 = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{I_{rf}^2}{enA^2} \frac{1}{\omega^2} (1 - \sin \omega t)^2 \tag{8.36}$$

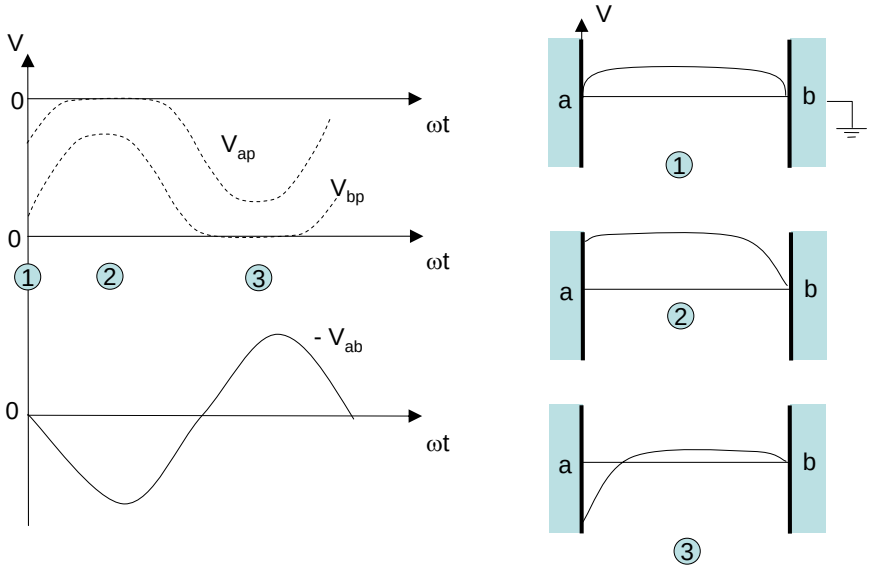


Abbildung 8.10: Spannungsverlauf zwischen Elektrode a,b und Plasma p, sowie zwischen den Elektroden.

Damit ergibt sich als Zusammenhang zwischen rf-Strom und rf-Spannung:

$$\boxed{V_{rf} = \frac{2e}{\epsilon_0} n \left(\frac{I_{rf}}{en\omega A} \right)^2 \sin \omega t} \tag{8.37}$$

Der Verlauf der einzelnen Anteile an der Spannung ist in Abb. 8.10 gezeigt. Man erkennt, daß die Randschichtspannungen vor den Elektroden über lange Zeiten innerhalb des rf-Zyklus klein sind. Die Randschichtspannung ist dazwischen abwechselnd an der Elektrode a und danach an b groß. Im äußeren Stromkreis folgt die Spannung allerdings wieder einem einfachen Gesetz $V_{rf} \sin \omega t$.
Abb. 8.10 zeigt zudem die räumliche Verteilung des Potentials unter der Annahme, daß die Elektrode *b* geerdet sei, und eine Wechselspannung an Elektrode a angelegt wird. Dieser Verlauf läßt sich einfach verstehen, wenn man sich verdeutlicht daß das *Potential des Plasmas immer das positivste in*

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

dem System Elektrode-Plasma-Elektrode sein muß. Wäre dies nicht der Fall, so könnten die Elektronen das Plasma einfach verlassen[1].
In der positiven Halbwelle der Spannungsquelle folgt das Plasmapotential dem Potential von Elektrode a, um immer positiver als die äußeren Potentiale zu bleiben. Die Potentialdifferenz fällt vor der Elektrode b ab. In der negativen Halbwelle bildet sich die Randschicht vor der Elektrode a aus, während die Randschichtspannung an der Elektrode b gering bleibt.

8.2.2 Heizmethoden

ohmsche Heizung

Bei rf Entladungen führt die Oszillation des Potentials an der Elektrode zu zeitlich veränderlichen elektrischen Feldern in dem die Ladungsträger beschleunigt werden:

$$m\ddot{x} + m\nu_m\dot{x} = eE_0 \sin\omega t \tag{8.38}$$

mit dem Ansatz:

$$x = c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t \tag{8.39}$$

bekommt man als Lösung

$$\dot{x} = -\frac{eE_0\omega}{m}\frac{1}{\omega^2+\nu_m^2}\left(\cos\omega t - \frac{\nu_m}{\omega}\sin\omega t\right) \tag{8.40}$$

Die absorbierte Leistung pro Elektron ist:

$$p = \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{dt}(-)\vec{F}dx = \frac{1}{dt}eE_0 \sin\omega t dx = eE_0 \sin\omega t\dot{x} \tag{8.41}$$

gemittelte Leistung pro e^-

$$\bar{p} = \int_0^{2\pi} eE_0 \sin\omega t\dot{x}dt \tag{8.42}$$

wenn man den Ausdruck für $\dot{x}$ einsetzt, so ergibt sich folgender Ausdruck für die absorbierte Leistung eines Elektrons:

[1]Nur in wenigen Fällen gilt diese Regel nicht. So entsteht bei Wasserstoffplasmen für eine kurze Zeitspanne im rf-Zyklus eine sog. **Feldumkehr**, bei der das elektrisch Feld nicht mehr in Richtung Plasmavolumen zeigt. Dadurch wird der Elektronenstrom aus dem Plasma heraus verstärkt. Dies wird notwendig, da ansonsten die Quasineutralität nicht aufrecht erhalten werden kann, da der Ionenstrom durch die sehr leichten und damit schnellen Wasserstoffionen durch den Verlust an thermischen Elektronen vor der Oberfläche nicht kompensiert werden kann

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\bar{p} = \frac{e^2 E_0^2}{2m} \frac{\nu_m}{\omega^2 + \nu_m^2} \tag{8.43}$$

Die gesamte absorbierte Leistung für eine Teilchendichte n an Elektronen pro Volumen ergibt:

$$P = \underbrace{\underbrace{\frac{ne^2}{m\nu_m}}_{\sigma_{dc}} \frac{\nu_m^2}{\omega^2 + \nu_m^2}}_{\sigma_{rf}} \frac{1}{2} E_0^2 = \frac{1}{2} \sigma_{rf} E_0^2 \tag{8.44}$$

bzw.

$$P = \frac{1}{2} \sigma_{rf} E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_{rf}} j_{rf}^2 \tag{8.45}$$

Die gesamte absorbierte Leistung pro Fläche, die durch einen Strom I_{rf} dissipiert wird, der durch ein Plasma der Dicke d fließt ist gegeben als:

$$P_{gesamt} = \frac{1}{2} I_{rf}^2 \frac{1}{\sigma_{rf}} d \tag{8.46}$$

mit dem Zusammenhang zwischen I_{rf} und V_{rf} aus Gl. 8.37 für $\nu_m \gg \omega$ erhält man:

$$I_{rf}^2 \propto V_{rf} \omega^2 \tag{8.47}$$

und damit

$$P_{ohmsch} \propto \omega^2 V_{rf} \frac{1}{\sigma} \propto \omega^2 V_{rf} \nu_m \tag{8.48}$$

Man erkennt, daß die absorbierte Leistung mit der Spannung V_{rf} und der Frequenz ω^2 skaliert. Zudem sind Stöße gemäß einer Stoßfrequenz ν_m notwendig.

stochastische Heizung

Im Experiment zeigt sich, daß die Leistungsabsorption bei niedrigen Drücken nicht komplett verschwindet (ν_m wird klein wegen $\nu_m = n_g \langle \sigma v \rangle$). D.h. trotz fehlender Stöße mit dem Neutralgas können die Elektronen anscheinend Energie aus dem oszillierenden Feld aufnehmen. Eine Erklärung bietet die Reflexion der Elektronen an den oszillierenden Randschichten. Damit die Elektronen einen Netto-Energiegewinn erfahren, muß sich nach einem Stoß mit der sich bewegenden Randschicht, die Phasenlage des Elektrons

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

bezüglich des oszillierenden Feldes ändern. Die Elektronen dürfen demnach nur in zufälliger Phasenlage auf die Randschicht treffen. Aus diesem Grund spricht man von **stochastischer Heizung**. Die Beschleunigung der Elektronen geschieht analog zur Fermi-Beschleunigung:

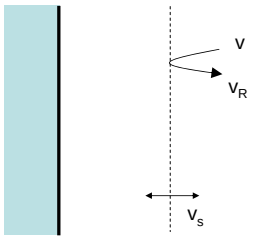


Abbildung 8.11: stochastische Heizung durch Fermi-Beschleunigung

$$v_R = -v + 2v_s \tag{8.49}$$

Die Zahl der einfallenden Teilchens Δn der Geschwindigkeit v, die pro Zeiteinheit Δtt mit der Randschicht stoßen ist $\frac{\Delta n}{\Delta t} = (v - v_s)f(v)dv$. Die absorbierte Leistung ist damit pro Elektron der Geschwindigkeit v:

$$dP = d\epsilon\frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{1}{2}m(v_R^2 - v^2)(v - v_s)f(v)dv \tag{8.50}$$

Die absorbierte Leistung durch n Elektronen ergibt sich durch Integration über den gesamten Geschwindigkeits-Raum:

$$P = -2m\int_{v_s}^{\infty} v_s(v - v_s)^2 f(v)dv \tag{8.51}$$

Setzen wir jetzt Gl. 8.49 so ergibt sich:

$$P = -2m\int_{v=v_s}^{\infty} v_s f(v)v^2 - 2v_s^2 v f(v) + v_s^3 f(v)dv \tag{8.52}$$

Die Geschwindigkeit der Randschicht sei gegeben als $v_s = v_0 \cos\omega t$. Die absorbierte Leistung entspricht dem zeitlichen Mittel über einen rf-Zyklus. Dadurch fallen die ungeraden Potenzen von v_s durch Mittelung weg, und es verbleibt:

$$\bar{P} = -2mv_0^2\int_{v=\bar{v_s}=0}^{\infty} vf(v)dv = -2mv_0^2\frac{1}{4}v_{th}n = \frac{1}{2}mv_0^2 v_{th}n \tag{8.53}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Hierbei gilt zu beachten, daß die Integration über den Geschwindigkeitsraum den gerichteten Fluß in eine Richtung betrachtet. Die Dynamik der Randschichtkante ist gegeben durch

$$j_{rf} \cos \omega t = env_s(t) = env_0 \cos \omega t \tag{8.54}$$

Demnach ist

$$v_0 = \frac{j_{rf}}{en} \tag{8.55}$$

Damit wird die absorbierte Leistung durch stochastische Heizung zu

$$\bar{P} = \frac{1}{2} m \frac{j_{rf}^2}{e^2 n^2} v_{th} n \tag{8.56}$$

Die Leistung skaliert wie

$$P_{stochastisch} \propto \omega^2 V_{rf} v_{th} = \omega^2 V_{rf} T_e^{1/2} \tag{8.57}$$

Man sieht, daß die Leistungseinkopplung in rf-Plasmen immer mit $\omega^2 V_{rf}$ skaliert.
Bei Plasmaprozessen ist es oft erwünscht die Erzeugung der Ladungsträger (n_e) von der Energie der auftreffenden Ionen (V_{rf}) zu entkoppeln. Bei einer einfachen rf-Entladung, die mit einer Frequenz getrieben wird, skaliert die Ladungsträger-Erzeugung gemäß $\omega^2 V_{rf}$ und die Randschichtspannung gemäß V_{rf}. Bei Multifrequenz-Entladungen allerdings nutzt man eine hohe Frequenz und eine kleine rf-Amplitude V_{rf}, um eine hohe Leistungseinkopplung zu gewährleisten bei gleichzeitig kleinem Spannungshub. Für die Beschleunigung der Ionen in der Randschicht stellt man das Randschicht-Potential durch eine zweite niedrigere Frequenz ein mit dementsprechend höherer Spannung. Somit lassen sich die Einstellung der Ladungsträgerdichte und der Randschichtspannung voneinander entkoppeln.

8.2.3 Asymmetrische, kapazitive rf-Entladung

Bei einer symmetrischen rf-Entladung ist aus Symmetriegründen der Spannungshub an beiden Randschichten identisch. Legt man eine Parallel-Plattenentladung mit unterschiedlichen Elektroden-Größen aus, kann man einen unterschiedlichen Spannungsabfall erzwingen.
Der Gleichspannungsanteil der Spannung zwischen den beiden Elektroden sei gemäß Abb.8.12:

$$V_{bias} = -(\bar{V}_a - \bar{V}_b) \tag{8.58}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

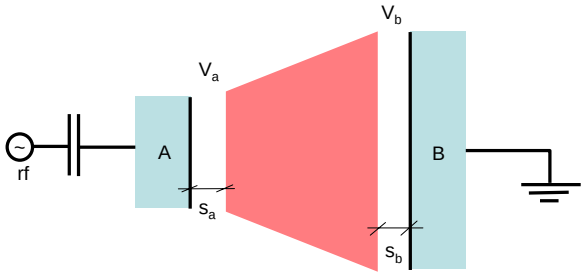


Abbildung 8.12: Asymmetrische RF Entladung

Das Plasma kann als Serienschaltung von zwei Kapazitäten C_a und C_b gesehen werden. Jede Randschicht (bzw. Kapazität) trägt einer Ladungsmenge Q die von der zeitlich gemittelten Spannung $\bar{V}_a$ bzw. $\bar{V}_b$ aufrecht erhalten wird. Nach dem Ausdruck für die Kapazität eines Plattenkondensators bekommt man für die beiden Randschichten:

$$Q = \bar{V}_a C_a = \bar{V}_a \frac{A}{s_a} \epsilon_0 \tag{8.59}$$

$$Q = \bar{V}_b C_b = \bar{V}_b \frac{B}{s_b} \epsilon_0 \tag{8.60}$$

Mit A und B den Flächen der Elektroden a und b und s_a und s_b den Dicken der Randschichten. Aus dieser Betrachtung der Kapazitäten folgt sofort:

$$\frac{\bar{V}_a}{s_a} A = \frac{\bar{V}_b}{s_b} B \tag{8.61}$$

Da das Plasma durch eine eindeutige Dichte gekennzeichnet ist, kann man einen zweiten Zusammenhang zwischen Randschichtdicken und Randschichtspannungen ableiten. Nach dem Child Langmuir-Gesetz sind Randschichtspannung und Randschichtdicke verknüpft wie:

$$j_0 \propto n v_B \propto \frac{V^{3/2}}{s^2} \tag{8.62}$$

Da die Stromdichte auf beide Elektroden a und b gleich sein muß, erhält man als eine zweite Gleichung:

$$\frac{V_a^{3/2}}{s_a^2} = \frac{V_b^{3/2}}{s_b^2} \tag{8.63}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Teilt man Gleichung 8.61 durch Gl. 8.63, so erhält man:

$$\frac{\bar{V}_a}{\bar{V}_b} = \left(\frac{B}{A}\right)^4 \tag{8.64}$$

D.h. durch eine sehr asymmetrische Auswahl der Elektrodengrößen wird die mittlere Spannung die zwischen Oberfläche und Plasma abfällt bei kleinen Elektroden sehr groß. Der Exponent 4 entstammt im wesentlichen der Annahme des Child-Langmuir-Gesetzes. Im Experiment beobachtet man eher eine Abhängigkeit mit einem Exponenten von 2.5. Der Verlauf der Randschichtspannung an einer rf-Elektrode ist in Abb. 8.13 gezeigt.

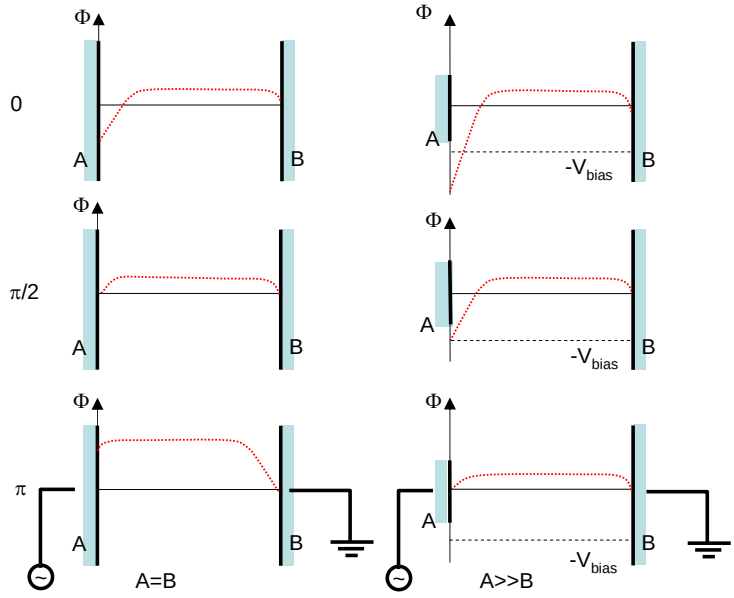


Abbildung 8.13: Verlauf des Potentials zwischen zwei Elektroden mit symmetrischer Elektrodengröße $A = B$ und asymmetrischer Elektrodengröße $A \ll B$.

Damit die Asymmetrie des Spannungsabfalls auf den beiden Elektroden a und b gemäß Gl. 8.64 gewährleistet ist, stellt sich an der Elektrode a eine zusätzliche DC-Gleichspannung ein, die **DC self bias** V_{bias}: der Generator erzeugt zunächst eine Wechselspannung V_{rf} mit Mittelwert 0, die über eine Kapazität an die Elektrode angeschlossen wird. Diese Kapazität trennt den Generator galvanisch von der Elektrode. Somit ist es möglich, daß sich an der Elektrode eine zusätzliche DC Spannung einstellt, die sich der Wechselspannung überlagert. An der Elektrode kommt eine Spannungshub der

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Amplitude V_{rf} zustande, allerdings ist der Mittelwert dieser Amplitude um V_{bias} zu negative Spannungen hin verschoben.

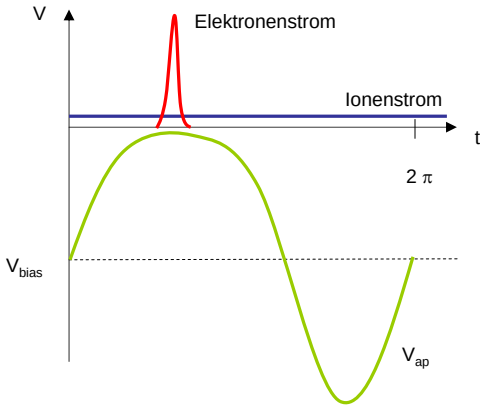


Abbildung 8.14: Verlauf der Ströme vor der Elektrode A.

Dieser DC self bias, kann allerdings nicht beliebige Werte annehmen, da die Netto-Ströme auf die Elektrode a immer Null ergeben müssen. D.h. während eines rf-Zyklus muß die Randschicht zu einem bestimmten Zeitpunkt komplett kollabieren, um den Elektronen zu ermöglichen die Elektrode zu erreichen. Dies ist in Abb. 8.14 illustriert. Die Spannung über die Randschicht an der Elektrode a zeigt einen nahezu sinusförmigen Verlauf. Eine *maximale* DC self bias $V_{bias,max}$ stellt sich so ein, daß $V_{bias,max}$ *genau gleich* der Amplitude von der außen angelegten Wechselspannung V_{rf} ist. Dadurch wird gewährleistet, daß die Randschicht zu einem Zeitpunkt kollabiert und der Elektronenstrom zur Elektrode genau gleich dem Ionenstrom zur Elektrode a wird.
Für beliebige Verhältnisse der Elektrodengrößen stellt sich eine DC self bias Spannung V_{bias} ein, damit Gl. 8.64 erfüllt werden kann. Der zeitliche Verlauf der Spannungen an der Elektrode Φ_a und im Plasma Φ_p ist in Abb. 8.15 illustriert.
Die Ionen, die durch die Randschicht fallen, können jetzt je nach Masse dem oszillierenden Feld folgen. Bei sehr leichten Ionen (H^+) ist die Ionenenergie-Verteilung dementsprechend breit. Es bildet sich eine charakteristische Doppelpeak-Struktur aus, wie in Abb. 8.16 gezeigt.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

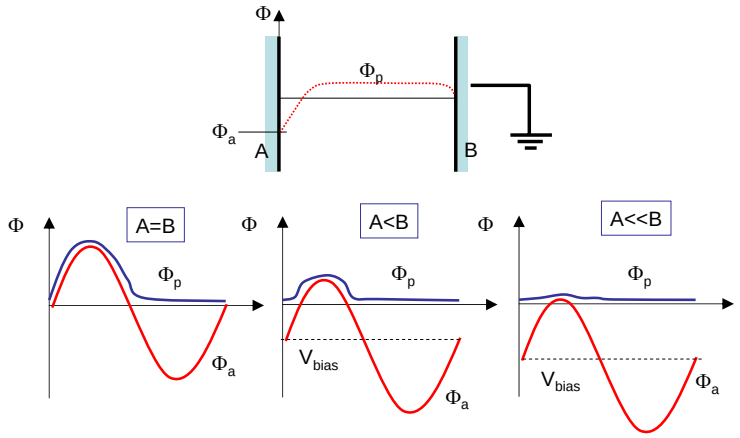


Abbildung 8.15: Zeitlicher Verlauf des Plasma-Potentials Φ_p und des Potential Φ_a an der Elektrode a für unterschiedliche Verhältnisse der Elektrodenflächen A und B.

8.3 Induktiv gekoppelte RF Entladungen

Bei induktiven Entladungen wird über eine Spule und ein Dielektrikum (Quartz-Fenster) ein elektrisches Feld im Plasma induziert. Das Plasma stellt dabei eine einzelne Sekundärwicklung eines Transformators dar. Für diese induktive Einkopplung gibt es zylindrische oder planare Konfigurationen. Der Verschiebungsstrom fließt im induktiven Fall im wesentlichen parallel zu dem Dielektrikum, während er im kapazitiven Fall normal zum Dielektrikum verläuft (siehe Abb.8.17).
Die absorbierte Leistung im Plasma hängt von der Effizienz des Transformators ab und dem Volumen in dem der Plasmastrom fliesst.

$$P = \frac{1}{2} j_\Theta^2 \frac{1}{\sigma} V \tag{8.65}$$

Mit dieser Methode können hoch dichte Plasmen erzeugt werden. Hierbei kann die Dichte einen Wert erreichen, der zu einer Eindringtiefe der elektromagnetischen Welle führt, die kleiner als die Gefäßdimension wird.
Der Brechungsindex eines Plasmas ist gegeben als:

$$n^2 = \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - i\frac{\nu_m}{\omega}} \right] \tag{8.66}$$

Die Frequenz bei der diese Plasmen betrieben werden (13.56 MHz) ist in der

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

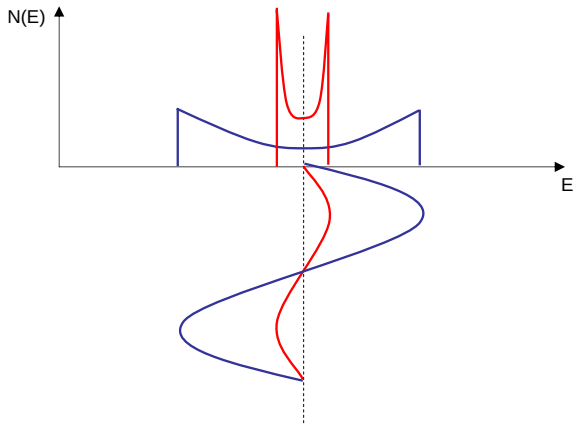


Abbildung 8.16: Je nach Masse der Ionen können sie dem oszillierenden Feld in der Randschicht mehr oder weniger folgen. Ihre Energie beim Auftreffen auf der Oberfläche hängt von ihrer Phasenlage zum elektrischen Feld im rf-Zyklus ab. Da das E-Feld längere Zeit maximal bzw. minimal bleibt, bildet sich eine charakteristische Doppelpeakstruktur der Ionen-Energie-Verteilung aus.

Regel kleiner als die Plasmafrequenz, demnach wird die Welle gedämpft. Die Eindringtiefe, bzw. **Skintiefe** δ ist definiert als Abfall der Amplitude der Welle auf 1/e gemäß:

$$\exp(-\alpha x) \qquad \text{mit} \qquad \alpha = \frac{1}{\delta} \tag{8.67}$$

In den typischen induktiv gekoppelten Plasmen gilt oftmals $\omega < \omega_p$. Damit bekommt man, je nach dem Verhältnis zwischen Stoßfrequenz ν_m und rf-Frequenz ω folgende Abschätzungen für den **normalen Skineffekt**:

$$\nu_m \ll \omega \qquad \delta = \frac{c}{\omega_p} = \left(\frac{\epsilon_0 m c^2}{n e^2}\right)^{1/2} \tag{8.68}$$

und den **anormalen Skineffekt** bei dem die Eindringtiefe frequenzabhängig ist (vgl. rf-Leitfähigkeit in Metallen).:

$$\nu_m \gg \omega \qquad \delta = \left(\frac{2\epsilon_0 c^2}{\omega \sigma_{dc}}\right)^{1/2} \tag{8.69}$$

In beiden Fällen skaliert die Skintiefe jedoch wie $\delta \propto n^{-1/2}$. Die Leistung, die absorbiert wird, hängt demnach von dem Volumen ab in das die em-Welle eindringen kann (Fläche $A \times \delta$):

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

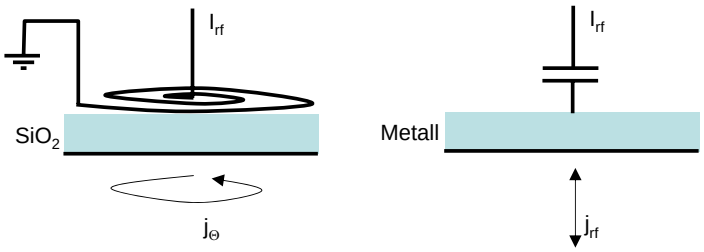


Abbildung 8.17: Unterschied kapazitive und induktive Kopplung

$$P = \frac{1}{2} j_\Theta^2 \frac{1}{\sigma} A\delta \tag{8.70}$$

hierbei lassen sich in Abhängigkeit von der Gefäßdimension d zwei Fälle unterscheiden:

- $\delta > d$

  Falls die Skintiefe bei kleiner Elektronendichte sehr groß ist, kann die em-Welle zwar tief eindringen allerdings ist die Fähigkeit der Sekundärwicklung "Plasma" den entsprechenden Strom I_{rf} zu tragen begrenzt. Die erreichbare Stromdichte j_Θ im Plasma ist deshalb proportional zu:

  $$j_\Theta \propto I_{rf} n \tag{8.71}$$

  damit wird die absorbierte Leistung zu ($\sigma \propto \frac{ne^2}{\nu_m m}$)

  $$P_{abs} = \frac{1}{2} I_{rf}^2 n^2 \frac{1}{\sigma} Ad \propto I_{rf}^2 n \tag{8.72}$$

- $\delta < d$

  Falls die Skintiefe bei hoher Elektronendichte sehr klein ist, kann der gesamte Strom in der Skintiefe getragen werden. Allerdings ist das geheizte Volumen jetzt begrenzt und die Stromdichte j_Θ im Plasma ist proportional zu (Radius r des Plasmas):

  $$j_\Theta \propto \frac{I_{rf}}{\delta r} \tag{8.73}$$

  damit wird die absorbierte Leistung zu

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$P_{abs} = \frac{1}{2} I_{rf}^2 \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{\sigma} A\delta \propto I_{rf}^2 n^{-1/2} \tag{8.74}$$

Aus diesen Abhängigkeiten der Leistung von der Elektronendichte und dem Strom durch die Spule, lässt sich die Hysterese einer induktiven Entladung und die unterschiedlichen Heizmodi ableiten. Dies ist in Abb.8.18 illustriert. Die Verlustleistung im Plasma skaliert in der Regel linear mit der Elektronendichte gemäß den Elektronenstoß-induzierten Verlustprozessen:

$$P_{loss} \propto n_g n \nu_{Ionisation} \epsilon_{Ionisation} \tag{8.75}$$

Die Elektronendichte stellt sich so ein, daß absorbierte Leistung und Verlustleistung gleich sind. Damit ergeben sich drei Schnittpunkte in der Abb. 8.18. (Der Anstieg von P_{abs} erfolgt stärker als $\propto n$ bei genauerer Abschätzung). Der Schnittpunkt bei kleiner Elektronendichte entspricht dem kapazitiven Mode (**E-Mode oder CCP: capacitive coupled plasma**); der Schnittpunkt bei der höchsten Elektronendichte entspricht dem induktiven Mode (**H-Mode oder ICP: inductive coupled plasma**). Der mittlere Schnittpunkt ist instabil, da eine Erhöhung der Elektronendichte, die Leistungsabsorption stärker erhöht als die Verluste.

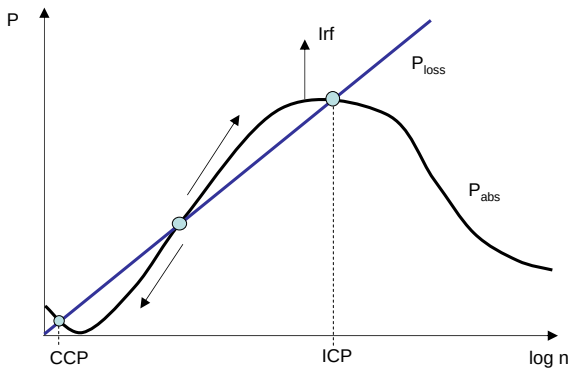


Abbildung 8.18: Arbeitspunkte der induktiven Entladung

Bei einer Erhöhung des Stromes in der Primärspule I_{rf} verschiebt sich die Kurve von P_{abs} auf der y-Achse. Dementsprechend entstehen und verschwinden die einzelnen Schnittpunkte. Dies führt zu einer Hysterese zwischen dem E- und H-Mode je nach Art der Variation von I_{rf}, wie in Abb. 8.19 illustriert: Im reinen CCP-Mode, bekommt man nur einen Schnittpunkt bei

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

kleinen Elektronendichten; mit Erhöhung von I_{rf} entstehen drei Schnittpunkte. Die Entladung bleibt allerdings im CCP-Mode; erst wenn der unterste Schnittpunkt verschwindet bei weiterer Erhöhung springt die Entladung in den ICP-Mode um; Verringert man jetzt den Strom I_{rf} wieder, so *bleibt* die Entladung allerdings im ICP-Mode, gekennzeichnet durch den Arbeitspunkt am obersten Schnittpunkt von P_{abs} und P_{loss}; erst wenn dieser Schnittpunkt verschwindet bei weiterer Erniedrigung von I_{rf} gelangt man wieder in den CCP-Mode. D.h. eine ausgeprägte Hysterese wird sichtbar (siehe Abb. 8.19.

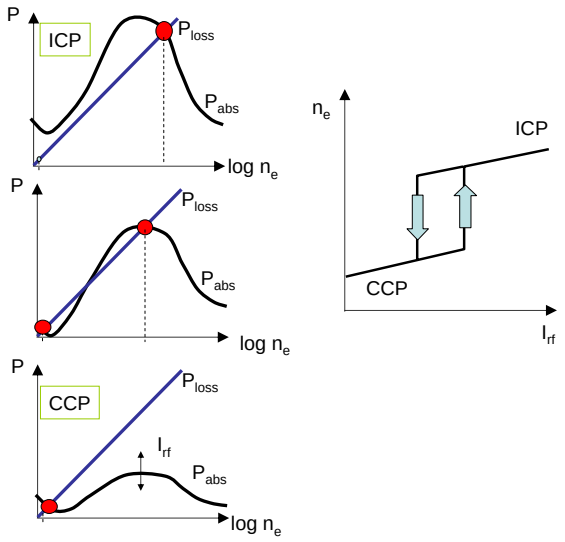


Abbildung 8.19: Bei der induktiven Entladung existieren nur zwei stabile Arbeitspunkte. Bei einer Variation der Leistung beobachtet man eine ausgeprägte Hysterese.

8.4 Plasmen mit Wellenheizung

8.4.1 Mikrowellenplasmen

Die Plasmadichte kann weiter erhöht werden, indem direkt Wellen eingestrahlt werden. Hierbei kommen oftmals Mikrowellen ($\sim$ GHz) zum Einsatz. Wegen der Frequenzabhängigkeit des Energie-Übertrags von der em-Welle auf die Elektronen müssen die Feldstärken sehr hoch sein. Desweiteren gilt es zu berücksichtigen, daß die Mikrowellen nicht beliebig weit in das Plasma sondern eindringen, da durch die hohe Elektronendichte der cut-off erreicht wird. D.h. das Plasma entsteht in der Regel vor dem Einkoppelfenster in die

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Vakuum-Apparatur. Dies kann man nur verhindern indem man eine spezielle Auslegung des Reaktors wählt, die zu einer stehenden Welle im Plasma resonant ist. Damit wird eine maximale Feldstärke erst in einer bestimmten Entfernung vom Einkoppelfenster erzeugt.

8.4.2 ECR Plasmen

Plasmen mit Wellenheizung können auch resonant realisiert werden, entweder mit der Heizung bei der oberen Hybriden oder durch die Absorption bei der Zyklotronfrequenz. Aus der Betrachtung des Brechungsindex für em-Wellen in magnetisierten Plasmen kann man ersehen, daß der Ort der Leistungsabsorption durch die Resonanzbedingung fest liegt. Die em-Welle kann zu diesem Ort vordringen, wenn die Magnetfeldstärke auf dem Weg zwischen Einkoppelfenster und Resonanz-Zone höher als die Resonanz-Feldstärke ist. Man spricht von Hochfeld-Einkopplung. Dies ist in Abb.8.20 illustriert.

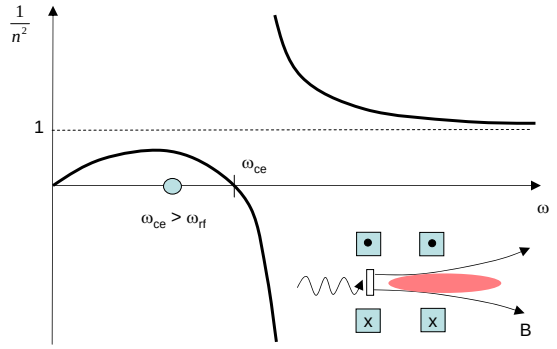


Abbildung 8.20: ECR-Entladung

Bei der resonanten Heizung der Elektronen gilt es zu beachten, daß dies in sehr stark *inhomogenen* Magnetfeldern geschieht, d.h. die Resonanzbedingung ist nur in einem sehr eng begrenzten Bereich erfüllt, wie in Abb. 8.21 gezeigt.
Treten Elektronen mit einer Geschwindigkeit v_0 durch diese Resonanzfläche hindurch werden sie beschleunigt. Dies ist in Abb. 8.22 verdeutlicht.
Der Gradient im Magnetfeld kann ausgedrückt werden durch eine örtliche Variation der Zyklotron-Frequenz:

$$\omega_{ce} = \omega_{rf}(1 + \alpha z) \tag{8.76}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

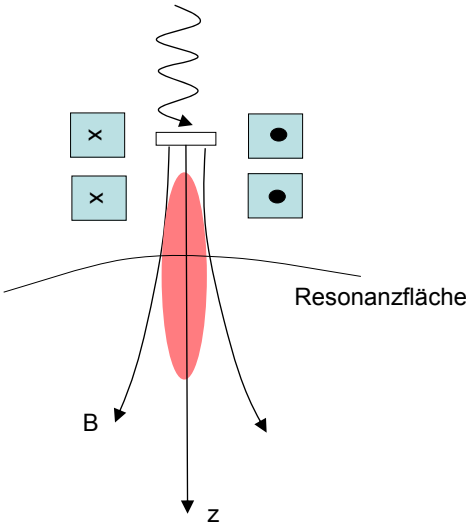


Abbildung 8.21: Heizung der Elektronen ist nur in der Umgebung einer Fläche möglich auf die Resonanzbedingung gilt

Die Wegstrecke z, die ein Elektron zurücklegt, das durch die Resonanzfläche mit der Geschwindigkeit v_0 durchtritt ist gegeben als $v_0 t$ Die Geschwindigkeit der Elektronen in radialer Richtung sei ausgedrückt im Sinne eines Zeigerdiagramms durch:

$$v = v_x + iv_y \tag{8.77}$$

Damit läßt sich die Lorentz-Kraft schreiben als:

$$m\frac{dv}{dt} = -eE + eivB \tag{8.78}$$

Die Gyration kann geschrieben werden als $v = v_r e^{i\omega t}$ und die Feldstärke der rechts-zirkular polarisierten em-Welle als $E = E_r e^{i\omega t}$. Damit ergibt sich:

$$\frac{dv_r}{dt} - i\omega_{ce} v_r = -\frac{eE_r}{m} \tag{8.79}$$

oder

$$\frac{dv_r}{dt} - i\underbrace{\omega_{rf}(1+\alpha v_0 t)}_{\dot{\Theta}} v_r = -\frac{eE_r}{m} \tag{8.80}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

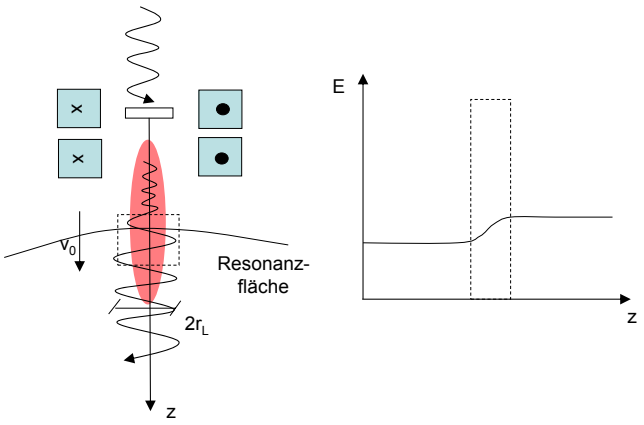


Abbildung 8.22: Beim Durchtreten durch die Resonanzzone mit der Geschwindigkeit v_0 werden die Elektronen kurzzeitig beschleunigt

Jetzt sei $\alpha v_0 t$ sehr viel größer als 1 und wir können für die zeitliche Entwicklung des Winkels $\Theta = v_x/v_r$ schreiben:

$$\dot{\Theta} = \omega_{rf}\alpha v_0 t \qquad \text{bzw.} \qquad \Theta = \omega_{rf}\alpha v_0 \frac{1}{2}t^2 \tag{8.81}$$

Die Erweiterung in eine zeitabhängige Resonanzbedingung ist wesentliches Merkmal der Leistungsabsorption in ECR-Plasmen. Ohne diesen Term wäre resonate Heizung nur exakt auf der Resonanzfläche möglich. Diese harte Randbedingung wird relaxiert durch die Formulierung der zeitabhängigen Resonanzbedingung. Gleichung 8.80 wird mit $e^{-i\Theta t}$ multipliziert und über einen Umlauf integriert.

$$\underbrace{\int \frac{dv_r}{dt} e^{i\Theta t} dt}_{\Delta v_r \;\; pro \;\; Umlauf} - \underbrace{\int \omega_{rf}\alpha v_0 t e^{i\Theta t} dt}_{=0} = -\frac{eE_r}{m}\int e^{i\Theta t} dt \tag{8.82}$$

Dies ergibt:

$$\Delta v_r = \frac{eE_r}{m}\left(\frac{2\pi}{\omega_{rf}\alpha v_0}\right)^{1/2} \tag{8.83}$$

damit ist der Energiezuwachs pro Durchtritt durch die Resonanzfläche gegeben als:

$$\boxed{\Delta\epsilon = \frac{1}{2}m\Delta v_r^2 = \frac{e^2E_r^2}{m}\frac{\pi}{\omega_{rf}\alpha v_0}} \tag{8.84}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

8.5 Atmosphärendruck-Plasmen

8.5.1 Bogen-Entladung

Bei einer Bogen-Entladung hat die Stromdichte in einer DC Entladung einen Wert erreicht, an dem die Aufheizung der Elektroden zur thermischen Emission von Elektronen führt. D.h. jetzt benötigt man nicht mehr eine hohe Spannung für die Elektronen-Vervielfältigung in der Gasphase, sondern die Elektronen werden direkt aus der Kathode emittiert.

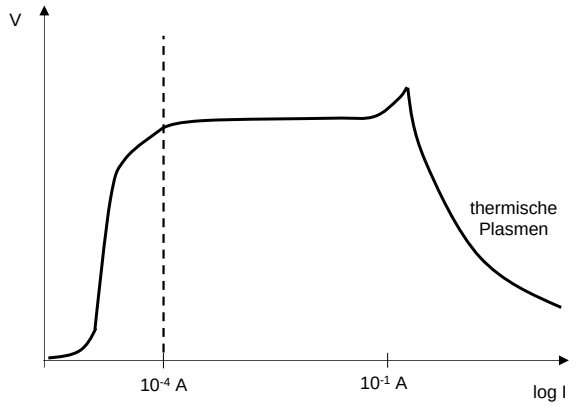


Abbildung 8.23: Kennlinie bis zur Bogenentladung

Die thermische Emission wird durch die **Richardson-Gleichung** beschrieben:

$$j = AT^2 \exp\left[-\frac{e\Phi}{k_B T}\right] \tag{8.85}$$

Bogenplasmen werden in der Regel bei Atmosphärendruck betrieben und der hohe Druck impliziert eine thermische Angleichung der einzelnen Teilchensorten, Elektronen, Ionen und Neutralgas.
Die Stabilität des Bogens ist durch das MHD Gleichgewicht gekennzeichnet, wie in Abb. 8.24 skizziert.
Der Strom des Bogens erzeugt eine Magnetfeld das über $j \times B$ Kräfte das Plasma begrenzt. Das Magnetfeld ist gegeben durch:

$$B_\Theta = \frac{1}{2}\mu_0 j_\parallel r \qquad r < a \tag{8.86}$$

$$B_\Theta = \frac{1}{2}\mu_0 j_\parallel \frac{a^2}{r} \qquad r > a \tag{8.87}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

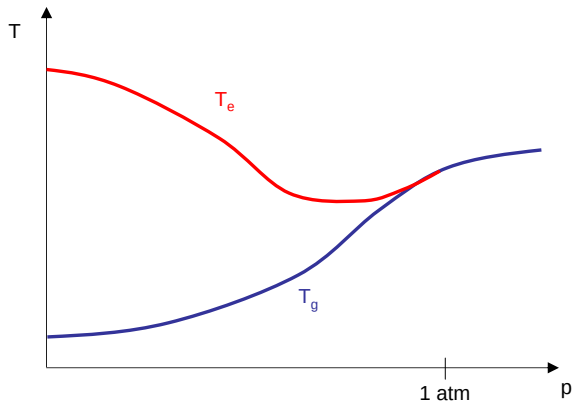


Abbildung 8.24: Angleichung der Neutralgas- und Elektronen-Temperatur in einem Bogenplasma

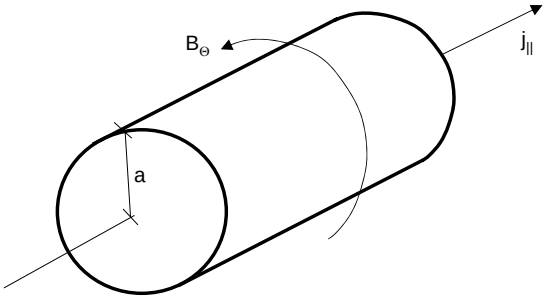


Abbildung 8.25: Gleichgewicht eines Plasmabogens

und das MHD-Gleichgewicht als:

$$\vec{j} \times \vec{B} = \nabla p \tag{8.88}$$

Setzt man Gl. 8.86 ein, so erhält man durch Integration für den Druck:

$$p(r) = \frac{1}{4}\mu_0 j_\parallel^2 (a^2 - r^2) \tag{8.89}$$

Im Zentrum des Bogens gilt:

$$p(0) = p_0 = \frac{1}{4}\mu_0 j_\parallel^2 a^2 \tag{8.90}$$

Der Strom, der durch den Bogen fließt ist $I = \pi a^2 j_\parallel$. Damit ergibt sich:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$p_0 = \frac{1}{4}\mu_0 \frac{I^2}{\pi^2 a^2} \tag{8.91}$$

Dies beschreibt den Druck bei einer gegebenen Ausdehnung des Bogens und eingeprägtem Strom. Oftmals ist der Strom in thermischen Plasmen der Plasmatechnik allerdings kleiner als daß der Bogen allein durch MHD Kräfte stabilisiert wird. Deshalb wird so ein Bogen durch eine Gasströmung, durch ein Verdrillung der Magnetfeldlinien, durch ein externes Magnetfeld oder durch Wandkontakt stabilisiert.
Der Bogenansatz selber ist in der Regel kleiner als die Ausdehnung des Bogens selbst. Durch eine Lokalisierung auf der Elektrodenoberfläche erhöht sich der Strom, damit die Temperatur und damit die Elektronen-Emission gemäß der Richardson-Gleichung. Es entsteht ein **Kathodenspot**. Durch diesen Bogenansatz entsteht ein Druckgefälle zwischen Elektrode und Plasmavolumen, der die Gas-Strömung antreibt, der sog. **Elektrodenjet**, wie in Abb.8.26 skizziert. Der Druckunterschied ist gegeben durch:

$$\Delta p = p_b - p_a = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \simeq \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 b^2} \tag{8.92}$$

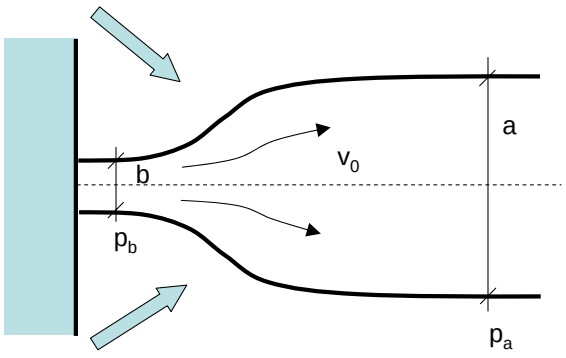


Abbildung 8.26: Der Druckunterschied zwischen Bogenfusspunkt und Bogen selbst führt zu einem sog. Elektrodenjet.

Mit der Bernoulli-Gleichung läßt sich das Druckgefälle in eine Abströmgeschwindigkeit umrechnen gemäß:

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho v_0^2 \tag{8.93}$$

Man erhält damit:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$v_0 = \frac{I}{\pi b}\sqrt{\frac{\mu_0}{2\rho}} \tag{8.94}$$

Diese Abströmgeschwindigkeit erreicht bis zu 100 ms^{-1} und treibt die Gasdurchmischung des Bogens mit der umgebenden Atmosphäre an (siehe Abb. 8.25).

8.5.2 Dielektrisch behinderte Entladung

Filamentierte Entladung

Will man die Entstehung eines Bogens verhindern so gelingt dies, indem man eine dielektrische Barriere in den Gas-Spalt einfügt. Nach dem Zünden einer Elektronenlawine, lagern sich diese auf dem Dielektrikum ab, und reduzieren damit die Feldstärke in dem Gas-Spalt. Die verbleibenden Ionen können jetzt zur Kathode strömen (Streamer) und die Entladung verlöscht wieder. Diese Mikroentladungen treten in der Form von einzelnen Filamenten auf, die nur für kurze Zeit im Bereich von Nanosekunden brennen und nur eine räumliche Ausdehnung im Bereich 10 bis 100 nm haben.

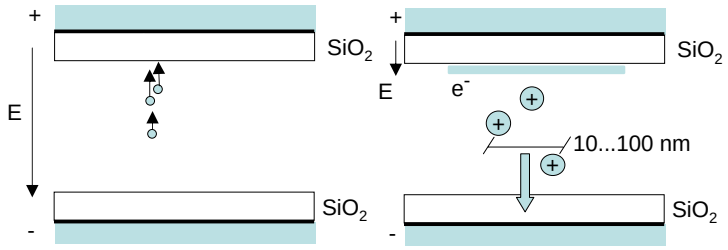


Abbildung 8.27: Filamentierte Barrieren-Entladung

Wichtiges Anwendungsgebiet der dielektrisch behinderten Entladung ist die Ozon-Erzeugung zur Wasseraufbereitung (siehe Abb. 8.28). Hierbei macht man es sich zunutze, dass Ozon sehr leicht wieder zerfällt. In den kurzen Zeiten eines lokalen Filaments wird die Sauerstoffchemie nur kurz angestoßen und Ozon hat eine nennenswerte Überlebens-Wahrscheinlichkeit in diesen Entladungen. Weiterer technischer Vorteil ist der Umstand, daß sich Barriere-Entladungen leicht skalieren lassen.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

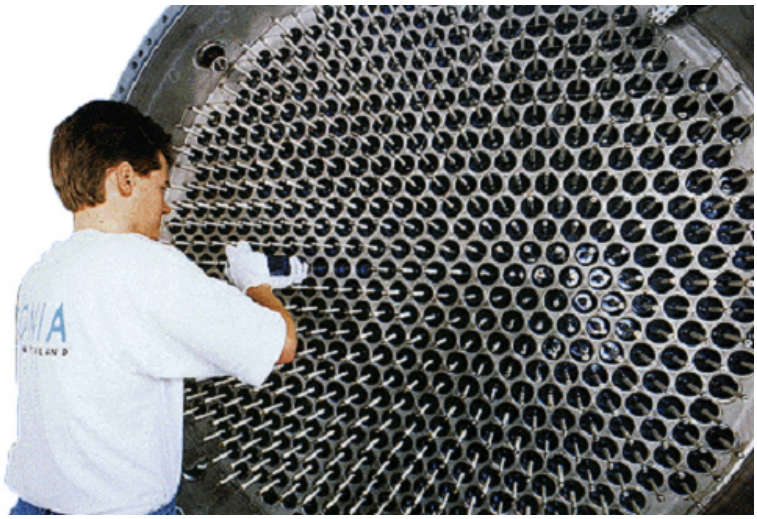


Abbildung 8.28: Ozonerzeugung in Barrieren-Entladungen zur Wasserentkeimung

Glimmentladung bei Atmosphärendruck

Ein Nachteil der Barrieren-Entladungen ist die Tatsache, dass sie in der Regel filamentiert ist und demnach die Ausnutzung einer Gasströmung nie vollständig sein kann. Zudem kann es durch die hohe lokale Stromdichte in den Filamenten zur Erosion der Oberfläche kommen.
Es zeigte sich allerdings, daß es bei mittleren Frequenzen im Bereich von kHz möglich ist auch eine gleichmäßige Glimmentladung bei Atmosphärendruck zu erzeugen. Um eine gleichförmige Entladung zu erhalten, wird in diesen Plasmen anscheinend das Durchbrechen der Entladung in der Form eines Filaments unterdrückt. Für die Entstehung einer solchen Entladung gibt es mehrere Erklärungsmöglichkeiten:

- **ion trapping**

  Bei einer mittleren Frequenz kann es gelingen, daß die Elektronen die Oberflächen erreichen können während die trägeren Ionen im oszillierenden E-Feld in der Mitte des Gas-Spaltes gefangen bleiben. In einer solchen Situation bekommt man ein reduziertes elektrisches Feld in dem Gasspalt und die Entladung zündet nur in der Randschicht, bricht aber nicht mehr durch. Diese Trägheitstrennung von Elektronen und Ionen kann man durch die Bewegungsgleichung abschätzen:

$$m\ddot{x} + m\nu_m\dot{x} = eE_0 \sin \omega t \tag{8.95}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Diese hat die Lösung:

$$x(t) = -\frac{eE_0}{m}\frac{1}{\omega^2+\nu_m^2}\sin\omega t - \frac{\nu_m}{\omega}\frac{eE_0}{m}\frac{1}{\omega^2+\nu_m^2}\cos\omega t \tag{8.96}$$

mittelt man die Auslenkung über eine rf-Periode so ergibt sich für $\nu_m \gg \omega$:

$$x_{rms} = \left(\int_0^{2\pi} x^2 dt\right)^{1/2} = \frac{2}{\pi}\frac{eE_0}{m\omega\nu_m} \tag{8.97}$$

Die Ionen bleiben demnach in dem Gas-Spalt gefangen, wenn die Auslenkung nicht größer als die Breite d des Spaltes wird ($x_{rms} = d$). Mit der Feldstärke bei einer Spannung V gegeben als $E_0 = V/d$ erhält man:

$$\boxed{\omega = \frac{2e}{\pi m}\frac{1}{\nu_m}\frac{V}{d^2}} \tag{8.98}$$

d.h. bei einer bestimmten Kombination von Frequenz, Spannung und Elektroden-Abstand kann man eine gleichmäßige Glimmentladung bei Atmosphärendruck erzeugen.

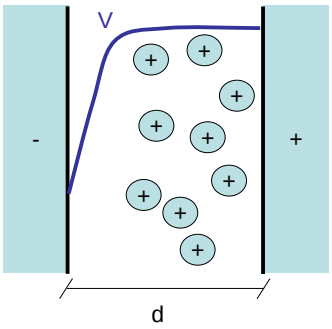


Abbildung 8.29: Selektiver Einschluß der Ionen durch das Ausnutzen ihrer Trägheit.

- **Memory-Effekt**

  Durch die Elektronenlawine wird die Oberfläche aufgeladen. Falls diese Oberflächenladung eine endliche Zeit braucht um abzufliessen, kann sie auch in der zweiten Hälfte der rf-Periode bestehen bleiben und das

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

äußere Feld sogar verstärken. Falls die Elektronendichte in der Gasphase, die in der ersten Hälfte der rf-Periode gebildet wurde nicht vollständig abklingt kann die Entladung in der zweiten Hälfte der rf-Periode wieder leichter aufgebaut werden.

- **Penning-Ionisation**

  Falls durch Erzeugung von Metastabilen in der Entladung ein Reservoir an angeregten Atomen erzeugt wird, können durch Penning-Ionisation fortlaufend neue Elektronen erzeugt werden. Penning-Ionisation am Beispiel für Argon ist:

$$\mathrm{Ar}^* + \mathrm{Ar} \rightarrow \mathrm{Ar}^+ + \mathrm{Ar} + \mathrm{e}^- \tag{8.99}$$

  Maßgeblich ist hier die längere Lebensdauer ($\sim \mu s$) der angeregten Zustände im Vergleich zur Lebensdauer eines einzelnen Filaments ($\sim$ ns).

8.6 Globale Plasmamodelle

Mit den bisher vorgestellten Entladungstypen und Einschlußmechanismen für Niedertemperaturplasmen lassen sich einfache Abhängigkeiten für die Temperaturen im Plasma und die Plasmadichte ableiten.

8.6.1 Teilchenbilanzen

Betrachten wir eine Plasmavolumen, bei dem die Ladungsträger ohne Stoßprozesse die Randschicht erreichen können. Im Gleichgewicht muß sich der Verlust an Ladungsträgern mit der Ionisation im Volumen ausgleichen. D.h. der Verlust an Ionen in einem Plasma mit Oberfläche A bilanziert mit der Ionisation im Volumen V mit Rate $k_{Ionisation}$ ist:

$$An_0 v_B = n_g n_0 k_{Ionisation} V \tag{8.100}$$

Setzt man die entsprechenden Abhängigkeit von der Elektronentemperatur ein so ergibt sich:

$$An_0 \sqrt{\frac{k_B T_e}{M}} = n_g n_0 k_{Ionisation,0} e^{-\frac{E_{Ionisation}}{k_B T_e}} \tag{8.101}$$

Aus dieser Abhängigkeit erkennt man sofort, daß die Temperatur des Plasmas steigen muß, wenn das Oberflächen-zu-Volumen-Verhältnis größer wird,

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

da nur so die Verluste ausgeglichen werden können. Auch wenn die Ionisationsenergie $E_{Ionisation}$ steigt muß das Plasma heißer werden, um die Oberflächenverluste auszugleichen. Man erkennt, daß die *Teilchenbilanz eine Bestimmungsgleichung für die Temperatur des Plasmas* ergibt. Diese Gleichung läßt sich verkürzt darstellen als:

$$\frac{k_{Ionisation}}{v_B} = \frac{A}{V} n_g^{-1} \tag{8.102}$$

Im Falle einer diffusions-bestimmten Situation wird der Strom an Ionen Γ_i zu den Oberflächen durch die ambipolare Diffusion begrenzt. Man bekommt:

$$\Gamma_i = -D_a \frac{dn}{dx} \tag{8.103}$$

In einer plan-parallelen Geometrie bekommt aus der Lösung der Diffusionsgleichung eine Abhängigkeit wie:

$$\Gamma_i = -D_a \frac{n}{l} \pi \tag{8.104}$$

wenn l der Elektroden-Abstand ist. Bei dieser ambipolaren Diffusion kann sich der Ionenstrom allerdings noch durch Ionisation erhöhen und man bekommt:

$$\frac{\Gamma_i}{dx} = k_{Ionisation} n_g n \tag{8.105}$$

Auch dies läßt sich linearisieren und man erhält durch Integration eines Diffusionsprofils in n von 0 bis $l/2$

$$\Gamma_i = k_{Ionisation} n_g n \frac{l}{\pi} \tag{8.106}$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{\pi}{l} D_a = k_{Ionisation} n_g \frac{l}{\pi} \tag{8.107}$$

mit $D_a = \frac{k_B T_e}{M \nu_m} = \frac{k_B T_e}{M n_g k_m}$ ergibt sich schließlich:

$$\frac{(k_{Ionisation} k_m)^{1/2}}{v_B} = \frac{\pi}{l} n_g^- 1 \tag{8.108}$$

Dies ist analog zu Gl. 8.102.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

8.6.2 Energiebilanz

Bei der Betrachtung der Energiebilanz wird eine bestimmte Leistung in ein Plasma eingekoppelt und kommt im wesentlichen in Form von Licht, energetischen Ionen, Elektronen und angeregten Neutralteilchen aus dem Plasma wieder heraus. Die Elektronen tragen eine Anteil von T_e aus dem Plasma heraus. Der dominante Beitrag ist der Fluß an energetischen Ionen. Diese tragen jeweils eine Energie E_{Ionen} entsprechend ihrer Ionisationsenergie $E_{Ionisation}$ und der Beschleunigung in der Randschicht mit Spannung V aus dem Plasma heraus:

$$E_{Ionen} = E_{Ionisation} + V \tag{8.109}$$

Der dominate Anteil auch hier ist die Beschleunigung in der Randschicht. Damit ergibt sich als Verlustleistung bzw. as absorbierte Leistung P_{abs} auf eine Plasmaoberfläche A:

$$P_{abs} = env_B AE_{Ionen} \tag{8.110}$$

Damit ergibt sich die Teilchendichte n im Plasma zu:

$$n = \frac{P_{abs}}{ev_B AE_{Ionen}} \tag{8.111}$$

Man erkennt, daß die Plasmadichte aus einer Bilanzgleichung für die absorbierte Leistung abgeleitet werden kann. Die quantitative Bestimmung der absorbierten Leistung für den Fall, daß man nur externe Größen wir rf-Ströme und Spannungen kennt ist allerdings oftmals nicht leicht.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Kapitel 9

Anwendung: Kernfusion

Die Entwicklung in der Plasmaphysik wurde im wesentlichen durch die Erforschung der kontrollierten Kernfusion vorangetrieben. Um aus der Verschmelzung von Atomkernen Energie zu gewinnen, muss ein Plasma bei ausreichender Temperatur lange genug eingeschlossen bleiben. Erst dann findet die Energiefreisetzung bei Fusionsreaktionen mit einer Rate statt, die das Aufrechterhalten des Plasmas gewährleistet. Dieses gezündete thermonukleare Plasma ist bislang noch nicht experimentell realisiert. Allerdings hat die Forschung bis jetzt einen Stand erreicht, die es erlaubt bei einer Extrapolation zu größeren Fusionsexperimenten die Zündung eines thermonuklearen Plasmas zu demonstrieren. Dies ist erklärtes Ziel des internationalen Großprojektes **ITER** *(Abb. 9.1).*

9.1 Fusionsreaktionen

Der Energiegewinn bei der Kernfusion basiert auf der Fusion leichter Atomkerne (siehe Abb. 9.2. Hierbei wird eine große Menge an Energie freigesetzt, da sich die Bindungsenergie pro Nukleon im Fusionsprodukt erhöht (Potentialtopf tiefer). Damit Fusion stattfindet, muss der Abstand der Atomkerne klein genug werden, damit sie durch den repulsiven Coulomb-Wall tunneln können, um in den Bereich der starken Wechselwirkung zu gelangen (siehe Abb. 9.3). Die Fusionsreaktionen von Wasserstoffisotopen mit hohem Wirkungsquerschnitt sind:

$$\mathrm{D} + \mathrm{D} \rightarrow {}^3\mathrm{He}(0.8\mathrm{MeV}) + \mathrm{n}(2.45\mathrm{MeV}) \tag{9.1}$$

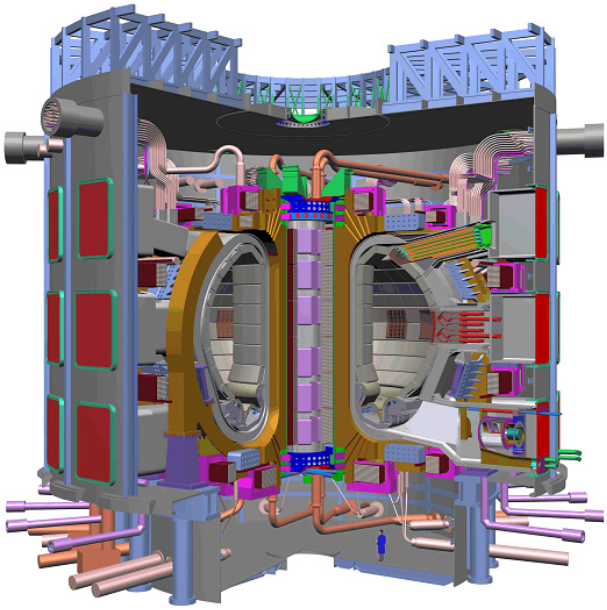


Abbildung 9.1: Zukünftiges Fusionsexperiment ITER

$$\mathrm{D} + \mathrm{T} \rightarrow^4 \mathrm{He}(3.52\mathrm{MeV}) + \mathrm{n}(14.07\mathrm{MeV}) \tag{9.2}$$

In der Sonne selbst findet die direkte Verschmelzung von Protonen zu Helium statt. Bei den irdischen Fusionsreaktoren wird in Zukunft Deuterium und Tritium als Brennstoff verwendet. Nachdem Tritium allerdings ein kurze Halbwertszeit von 11 Jahren besitzt, muß es in dem Prozeß hergestellt werden. Eine Möglichkeit besteht darin Tritium im Fusionsreaktor zu *erbrüten*. Dazu kann man die Fusionsneutronen nutzen, die über Einfang in Lithium in den Reaktorwänden wieder Tritium erbrüten (^{6}Li(n,^{4}He)T).
Der Fusions-Wirkungsquerschnitt bei der Verschmelzung zweier Atome mit Kernladungszahl Z_1 und Z_2 wird durch den Tunnelprozeß bestimmt mit einem Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{Fusion} = S(E_s)\frac{1}{E_s}e^{-2\pi\alpha Z_1 Z_2 \frac{c_0}{v_s}} \tag{9.3}$$

E_s und v_s sind Energie und Geschwindigkeit im Schwerpunktsystem; α die Feinstrukturkonstante und c_0 die Lichtgeschwindigkeit. Den Exponentialterm bezeichnet man als **Gamow-Faktor**.
Der prinzipielle Verlauf der Wirkungsquerschnitte ist in Abb. 9.4 gezeigt. Gegenwärtige Experimente werden in Wasserstoff oder Deuterium durchgeführt.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

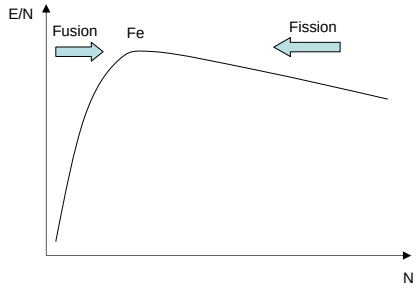


Abbildung 9.2: Bindungs-Energie pro Nukleon.

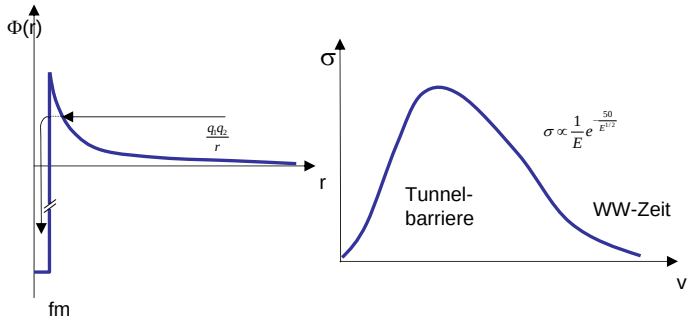


Abbildung 9.3: Fusion findet statt durch das Tunneln durch die Coulomb-Barriere.

Bei diesen ist die Neutronen-Produktion gering und es kann in einer nicht radioaktiven Maschine experimentiert werden.
Als Alternativkonzept zur Fusion wurde eine zeitlang die μ-katalysierte Fusion untersucht. Hierbei wird durch einen Beschleuniger (3 GeV Protonen) in einem Target Mμonen erzeugt mit einer Lebensdauer von ca. 10^{-6} s. Diese Mμonen können die Elektronen in Deuterium bzw. Tritium in diesem Target ersetzen. Es entstehen mμonische DT-Moleküle in denen die Coulomb-Barriere durch den kleineren Bohr-Radius erniedrigt ist und Fusion kann statt finden. Mit einer Effizienz von 99.4 % wird dabei ein Heliumkern gebildet und das Mμon wieder freigesetzt. Somit kann dieses Mμon zur Katalyse von weiteren DT Reaktionen gebraucht werden. Leider wird bei 0.6 % der DT Reaktionen auch muonisches Helium gebildet und das Muon ist damit verloren gegangen. Im Experiment zeigt sich deshalb, daß nur ca. 100 DT Reaktionen pro Muon stattfinden. Dies ist zu wenig um den Energieeinsatz

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

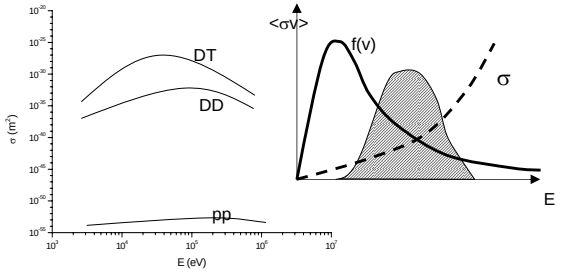


Abbildung 9.4: Wirkungsquerschnitte einiger Fusionsreaktionen.

zur Erzeugung des 3 GeV Protons zu kompensieren.

9.2 Zünd-Kriterium

Um die Grenze zu bestimmen ab der thermonukleares Zünden auftreten kann muss eine Leistungsbilanz des Fusionsplasmas aufgestellt werden. Hierzu ist es nötig den Energiegewinn durch Fusionsprozesse mit den Verlusten durch eine endliche Energie-Einschlußzeit durch Brems- und Linienstrahlung zu bilanzieren.

- **Fusionsenergie**

  Die Rate der Fusionsreaktionen ist gegeben als:

$$R = n_1 n_2 \langle \sigma v_R \rangle = \frac{1}{4} n^2 \langle \sigma v_R \rangle \tag{9.4}$$

  Hier wurde ausgenutzt, daß immer 2 Ionen benötigt werden für eine Fusionsreaktion ($n_1 = 1/2n$). Der Ratenkoeffizient $\langle \sigma v_R \rangle$ ergibt sich aus einer Faltung der Verteilungsfunktion mit dem Wirkungsquerschnitt:

$$\langle \sigma v_R \rangle = A \int \sigma(v) \exp\left[\frac{mv^2}{2k_B T_i}\right] v^3 dv \tag{9.5}$$

  beziehungsweise als Funktion der Energie ϵ:

$$\langle \sigma v_R \rangle = \frac{1}{(m\pi)^{1/2}} (k_B T_i)^{3/2} \int \sigma(\epsilon) \exp\left[\frac{\epsilon}{k_B T_i}\right] \epsilon d\epsilon \tag{9.6}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

- **Bremsstrahlung**

  Bei voll-ionisierten Plasmen sind die Strahlungsverluste im wesentlichen Bremsstrahlung der Elektronen, die im Coulombfeld der Ionen abgelenkt werden. Die abgestrahlte Leistung einer Ladung, die mir der Beschleunigung a beschleunigt wird, ist gegeben als:

$$P_e = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2 \tag{9.7}$$

  Die Ablenkung im Coulomb-Feld ist in Abb.9.5 skizziert. Wir betrachten wieder Kleinwinkelstöße, bei denen die Coulomb-Kraft, vereinfacht mit dem Stoßparameter b ausgedrückt wird:

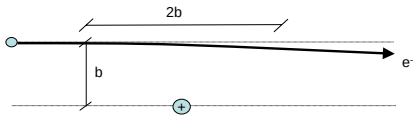


Abbildung 9.5: Ablenkung der Elektronen im Feld der Ionen führt zu Bremsstrahlungs-Verlusten des Plasmas

$$F = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 b^2} \qquad \text{bzw.} \qquad a = \frac{Ze^2}{m_e 4\pi\epsilon_0 b^2} \tag{9.8}$$

  Gemäß Abb.9.5 wirkt diese Kraft für eine Zeit τ, die gegeben ist durch $\tau = \frac{2b}{v}$ mit v der Geschwindigkeit des Elektrons. D.h. die Energie die beim Stoß verloren geht ist:

$$\epsilon = P_e \tau = P_e \frac{2b}{v} \tag{9.9}$$

  Die Verluste durch Bremsstrahlung ergeben sich aus der Rate mit der diese Verluste auftreten. Bei gegebener Dichte an Elektronen und Ionen bekommt man für einen Stoßparameter b den Anteil:

$$P_{br} \mathrm{d}b = \epsilon n_e n_i v 2\pi b \mathrm{d}b = P_e 2b n_e n_i 2\pi b \mathrm{d}b \tag{9.10}$$

  mit v der Relativgeschwindigkeit. Damit bekommt man:

$$P_{br} \mathrm{d}b = \frac{4e^6 n_e n_i Z^2}{3(4\pi\epsilon_0)^3 m_e^2 c^3 b^3} 2\pi b \mathrm{d}b \tag{9.11}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Die gesamten Verluste durch Bremsstrahlung erhält man durch Integration über alle Stoßparameter. Hierbei muß insbesondere der minimale Stoßparameter betrachtet werden. Der Abstand größter Annäherung sei durch die Heisenberg'sche Unschärferelation gegeben:

$$\Delta x \Delta p = \hbar \tag{9.12}$$

Die Imuplsunschärfe sei $\Delta p = m_e v$ und der minimale Stoßparameter entspricht der Ortsunschärfe Δx. Damit ergibt sich:

$$b_{min} = \frac{\hbar}{m_e v} \tag{9.13}$$

Mit dieser Integrationsgrenze und der Bestimmung der Geschwindigkeit aus $\frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{3}{2} k_B T_e$ ergibt der Verlust durch **Bremsstrahlung**:

$$\boxed{P_{br} = \frac{1}{4\pi\sqrt{3}\epsilon_0^3} \frac{e^6}{m_e^{3/2} c^3 h} (k_B T_e)^{1/2} n_e n_i Z^2 \propto (k_B T_e)^{1/2} n^2 Z^2} \tag{9.14}$$

- **Linienstrahlung**

  bei vollionisierten Plasmen spielt die Linienstrahlung eine untergeordnete Rolle. Allerdings können Verunreinigung die durch Wandprozesse in das Plasma getragen werden, die Leistungsbilanz stark beeinflussen. Die Energie der **Linienstrahlung** skaliert mit

$$\epsilon \propto \frac{Z^2}{n^2} \tag{9.15}$$

  n ist Hauptquantenzahl. Damit effizient Energie abgestrahlt wird benötigt man eine Ungleichgewicht in der Besetzung. Diese skaliert im einfachsten Fall gemäß Boltzmannbesetzung $\exp -\frac{\epsilon}{k_B T_i}$. Dieser Exponentialfaktor läßt sich entwickeln für große Temperaturen im Vergleich zur Energie der Linienstrahlung und man erhält als Abhängigkeit für die abgestrahlte Leistung in dieser sehr einfachen Abschätzung:

$$\boxed{P_{Linien} \propto \epsilon \exp\left[-\frac{\epsilon}{k_B T_i}\right] \simeq \epsilon^2 \propto Z^4} \tag{9.16}$$

  D.h die Strahlungsverluste durch Linienstrahlung steigen sehr stark mit der Kernladungszahl der Verunreinigung an. In reinen Wasserstoffplasmen sind sie unerheblich.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

- **Einschluß**

  Für die Leistungsbilanz ist schließlich noch die Isolation des Plasmas wesentlich. Dies wird in einem einfachsten Ansatz mit einer Energie-Einschlußzeit τ_e ausgedrückt für die Energie im Plasma bei gleicher Temperatur von Ionen und Elektronen ($=\frac{3}{2}n_e k_B T_e + \frac{3}{2}n_i k_B T_i = 3nk_B T$):

$$P_{Einschluss} = \frac{3nk_B T}{\tau_e} \tag{9.17}$$

Die einzelnen Terme der Leistungsbilanz müssen im Gleichgewicht sein:

$$\frac{1}{4}n^2\langle\sigma v\rangle\epsilon_{Fusion} = P_{br} + P_{Linien} + \frac{3nk_B T}{\tau_e} \tag{9.18}$$

Die Linienstrahlung ist vernachlässigbar und man erhält:

$$\frac{1}{4}n^2\langle\sigma v\rangle\epsilon_{Fusion} = \xi n^2 (k_B T)^{1/2} + \frac{3nk_B T}{\tau_e} \tag{9.19}$$

Der Vorfaktor der Bremsstrahlung ist durch ξ abgekürzt. Aufgelöst nach dem Produkt $n\tau_e$ ergibt sich das eine Gleichung für die Leistungsbilanz zu:

$$n\tau_e = \frac{3k_B T}{\frac{1}{4}\langle\sigma v\rangle\epsilon_{Fusion} - \xi(k_B T)^{1/2}} \tag{9.20}$$

Allerdings kann man zudem annehmen, daß die frei gesetzte Leistung wieder durch das Fusionsplasma absorbiert wird und dort direkt zur Heizung beiträgt: (i) die Heliumkerne, die bei der Fusion mit 3.5 MeV entstehen geben ihre kinetische Energie an das Plasma ab; (ii) die Bremsstrahlung wird vom Plasma wieder re-absorbiert; (iii) die nach außen abgegebenen Leistungsflüße werden im Kraftwerksbetrieb dort in elektrische Energie umgewandelt und über die diversen Heizmethoden wieder dem Plasma zugeführt.
Unter der Annahme, dass die Verlustleistung teilweise mit einem Wirkungsgrad η (typische Werte sind $\eta \sim 0.4$) wieder absorbiert wird, ergibt sich für die Leistungsbilanz:

$$\frac{3nk_B T}{\tau_e} + P_{br} = \eta\left[\frac{1}{4}n^2\langle\sigma v\rangle\epsilon_{Fusion} + P_{br} + \frac{3nk_B T}{\tau_e}\right] \tag{9.21}$$

Damit ergibt sich das sog. **Lawson-Kriterium** für die Zündbedingung des thermonuklearen Plasmas zu:

$$\boxed{n\tau_e = \frac{3k_B T(1-\eta)}{\eta\left[\frac{1}{4}n^2\langle\sigma v\rangle\epsilon_{Fusion} - \xi(k_B T)^{1/2}\right] - \xi(k_B T)^{1/2}}} \tag{9.22}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Der Verlauf des Zünd-Kriteriums als Funktion $n\tau_e$ in Abhängigkeit von T ist in Abb. 9.6 gezeigt.

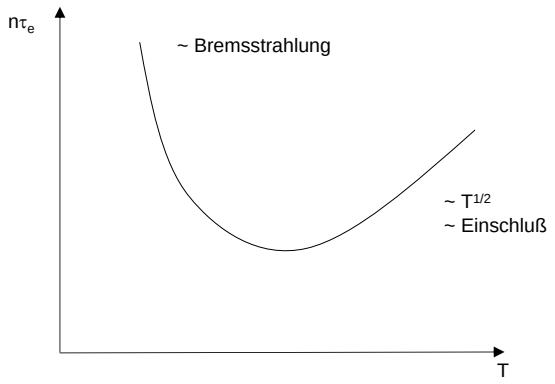


Abbildung 9.6: Zündkurve für thermonukleares Brennen.

Hat man dieses Kriterium erreicht, so brennt das Fusionsplasma *selbstständig* ohne äußere Energiezufuhr! Dabei gilt zu beachten, daß für die Kontrolle eines Fusionsplasmas, die Energiezufuhr von außen allerdings einen gewissen Wert nicht unterschreiten sollte. Das Experiment ITER ist so ausgelegt, daß die erzeugte Fusionsleistung um den Faktor 10 über der von außen zugeführten liegt. Das Verhältnis aus erzeugter Fusionsleistung P_{Fusion} zu zugeführter Heizleistung $P_{Heizung}$ bezeichnet man als Gütefaktor Q:

$$Q = \frac{P_{Fusion}}{P_{Heizung}} \tag{9.23}$$

Bislang wurde die Erzeugung von Helium durch die Fusions-Reaktion noch nicht berücksichtigt . Durch fortlaufende Helium-Produktion wird der Anteil an Deuterium und Tritium in dem Plasma kleiner und das Zündkriterium ist auch zu große Einschlusszeiten τ_e hin beschränkt. D.h. der Einschluss darf nicht zu perfekt sein, um die Asche (=He) der Fusionsreaktion abführen zu können.
Dieser Faktor modifiziert das Zündkriterium etwas. Die Zahl der erzeugten He-Kerne sei proportional zur Plasmadichte. Quasineutralität fordert:

$$n_D + n_T + 2n_{He} = n_e \tag{9.24}$$

Mit $n_{He} = f n_e$ ergibt sich bei anfänglich idealer DT Mischung (=1:1):

$$n_D = n_T = \frac{1}{2} n_e (1 - 2f) \tag{9.25}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

D.h. der Faktor $(1-2f)$ modifiziert die Plasmadichte wie sie in das Lawson-Kriterium eingesetzt wurde.

9.3 Plasma-Einschluss

Um das thermonukleare Zünden des Plasmas zu erreichen, kann wird im wesentlichen an einer Einschluß-Verbesserung gearbeitet. Dementsprechend gibt es unterschiedliche Konzepte ein heisses Fusionsplasma zu erzeugen. Es lassen sich zwei Klassen unterscheiden, die magnetische Fusion, wie sie im folgenden diskutiert wird und die Trägheitsfusion, bei der ein Brennstoffgemisch aus Deuterium und Tritium mittels Laserstrahlung zur Implosion gebracht wird. Letzteres wird hier nicht besprochen.

9.3.1 Tokamak

Die ersten Anordnungen zum magnetischen Einschluß erfolgten in Spiegelmaschinen. Allerdings werden bei hohen Dichten durch Stoßprozesse Teilchen in die entsprechende Verlustkegel gestreut, so daß die Einschlußzeit begrenzt bleibt.
Die Variante kurze Plasmadauer aber hohe Dichten, wie in den Pinch-Entladungen (z und Θ-Pinche), wird durch die MHD Instabilität von Plasmen mit hohem β erschwert.
Der am weitesten fortgeschrittene Ansatz zur magnetischen Fusion ist die Untersuchung eines torodialen Einschlusses, um die Verluste an den Enden einer Spiegelmaschine bzw. eines z- oder Θ-Pinches zu vermeiden.
Diese torodiale Anordnung hat fundamentale Konsequenzen für die Gleichgewichtsbedingung des Plasmas. Wesentlich dabei ist die Tatsache, daß das magnetische Torodial-Feld auf der Innenseite des Torus größer ist als auf der Außenseite. Es entsteht notwendigerweise ein Gradient im Magnetfeld über den Plasmaquerschnitt (siehe Abb.9.7).
Eine solche Plasmakonfiguration ist zunächst noch instabil. Dies kann man im Einzelteilchen als auch im Fluidbild begründen:

- **Stabilität eines torodialen Plasmas im Einzelteilchenbild**

  Bei einem Gradienten im B-Feld führt die ∇B-Drift zu einer Trennung der Ladungsträger. Dadurch entsteht ein elektrisches Feld, das gemäß der $E \times B$-Drift *beide* Teilchensorten gleichermaßen nach aussen drängt (siehe Abb.9.8. D.h. diese Konfiguration ist nicht stabil. Diese Auswärtsdrift kann durch eine Verscherung der Magnetfeldlinien kompensiert werden, bei der das Führungszentrum der Teilchenbewegung immer wieder zur Innenseite des Torus geführt wird.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

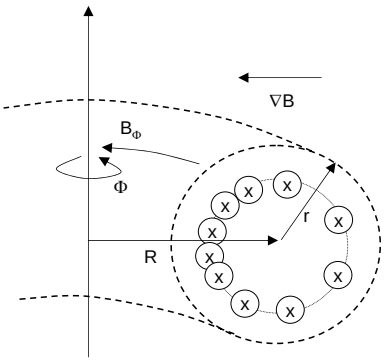


Abbildung 9.7: B-Feld Konfiguration in einer torodialen Anordnung hat notwendigerweise einen Gradienten.

- **Stabilität eines torodialen Plasmas im Fluidbild**

  Das MHD Gleichgewicht ist gegeben durch:

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} \tag{9.26}$$

  Die Magnetfeldverscherung führt zu einer konzentrischen Anordnung ineinander geschachtelter **Flussflächen** auf denen sich durch parallel Transport ein einheitlicher Druck einstellt. Der Querschnitt des Torus besteht damit aus konzentrischen Kreisen, die jeweils einem bestimmten Druck entsprechen. Stellt man das MHD Gleichgewicht auf der Innenseite und Außenseite einer Fläche konstante Druckes dar, So müssen die Ströme $j_\perp$, die polodial fliessen würden auf der Innen- und Außenseite unterschiedlich sein, wie in Abb. 9.9 skizziert.

$$\vec{j}_{\perp,1} \times \vec{B}_{\Phi,1} = \vec{j}_{\perp,2} \times \vec{B}_{\Phi,2} \tag{9.27}$$

  Diese Konfiguration ist nicht möglich, da wir im Plasma keine Stromquellen haben und demnach immer div$j = 0$ gelten muß. Daraus folgt, daß ein zusätzlicher Strom $\vec{j}_\parallel$ fliessen muss der ein magnetisches Polodial-feld B_p bedingt. Die Überlagerung von B_p und B_Φ führt zu einer Verscherung des Magnetfeldlinien.

  Der Zusammenhang aus Strom und Magnetfeld läßt sich wie folgt ableiten. Der diamagnetische Strom ist zunächst:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

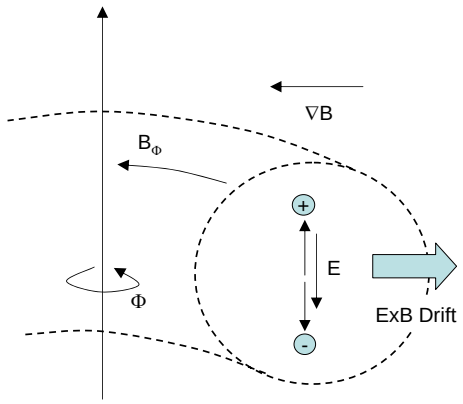


Abbildung 9.8: $E \times B$-Drift in torodialen Plasmen

$$\vec{j}_\perp = \frac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2} \tag{9.28}$$

Der Strom parallel zum Magnetfeld läßt sich schreiben als

$$\vec{j}_\parallel = \frac{\vec{j}\vec{B}}{B^2}\vec{B} \tag{9.29}$$

aus der Bedingung div$j = 0$ ergibt sich schließlich:

$$\nabla \left(\frac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2} + \frac{\vec{j}\vec{B}}{B^2}\vec{B} \right) = 0 \qquad \frac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2} + \frac{\vec{j}\vec{B}}{B^2}\vec{B} = \text{const.} \tag{9.30}$$

D.h. der Ausdruck in der Klammer muss auf einer Fläche konstanten Druckes auch konstant bleiben und legt damit Stromprofil und Magnetfeldkonfiguration fest.

Diese Argumente zeigen, daß ein torodiales MHD Gleichgewicht in axialsymmetrischen äußeren Magnetfeldern nur erreicht werden kann, wenn auch ein torodialer Strom $\vec{j}_\parallel$ fließt, der das Magnetfeld verschert. Diese Verscherung des Magnetfeldes kann durch einen Strom im Plasma selbst erzeugt werden (= **Tokamak-Prinzip**). Dabei wird das Plasma als Sekundärwicklung eines Transformators betrieben. Wird in der Primärwindung der Strom geändert,

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

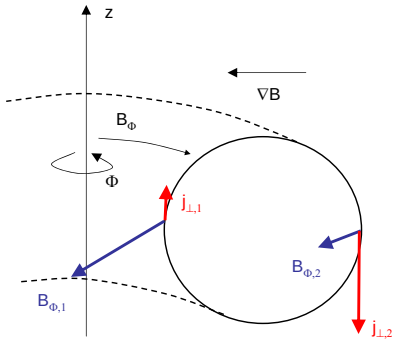


Abbildung 9.9: Das ungleichförmige torodiale B-Feld B_Φ auf Flächen konstanten Druckes, führt zu unterschiedlichen Strömen $\perp$ zu B_Φ auf Innen- und Außenseite des Torus.

so wird in der Sekundärwicklung ein Strom auf der Torusachse angeworfen, der die Verscherung des Magnetfeldes erzeugt (Abb. 9.10). Diese Verscherung kann nicht stationär aufrechterhalten werden, da in der Primärwicklung kontinuierlich der Strom geändert werden muß.

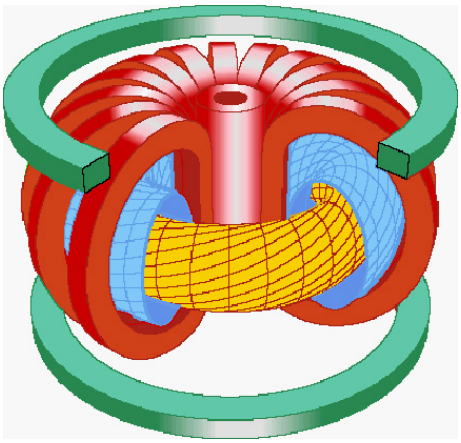


Abbildung 9.10: Tokamak-Prinzip.

Diesen Nachteil vermeidet das Alternativkonzept Stellarator bei dem ein verschertes Magnetfeld direkt durch nicht axialsymmetrische äußere Spulen speziell erzeugt wird (= **Stellarator-Prinzip**). Die technische Realisierung ist allerdings wesentlich aufwändiger (Abb. 9.11).
Die Verscherung des Magnetfeldes wird mit dem sog. **Sicherheitsfaktor** q beschrieben. q ist das Verhältnis aus torodialen zu polodialen Umläufen einer

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

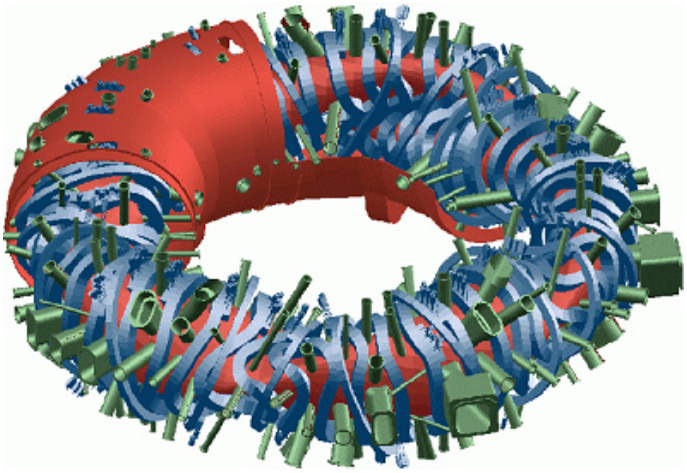


Abbildung 9.11: Stellarator W7X

Magnetfeldlinie, gemäß Abb.9.12. Wenn man mit N die Umläufe um den Torus bezeichnet und mit n_t und n_p die torodialen bzw. polodialen Umläufe, so definiert sich q zu

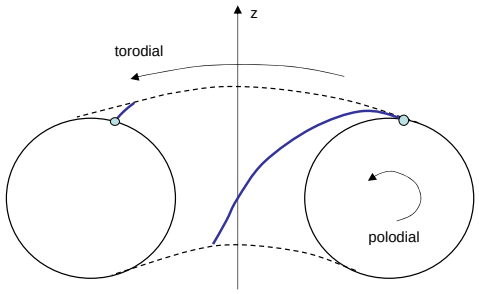


Abbildung 9.12: Der Sicherheitsfaktor q ist definiert als das Verhältnis von polodialen zu torodialen Umläufen einer Feldlinie

$$q = \underbrace{\lim}_{N\to\infty} \frac{n_t}{n_p} \tag{9.31}$$

d.h. ein unverschertes Magnetfeld entspricht $q \to \infty$ und eine starke Verscherung entspricht $q \to 0$. Der Parameter q wird Sicherheitsfaktor genannt, weil er nur in bestimmten Bereichen liegen darf um ein stabiles Plasma zu gewährleisten. Diese Stabilität bezieht sich auf großskalige Auslenkungen aus dem Gleichgewicht:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

- **untere Grenze für q: q >2**

  Wird q sehr klein ist die Verscherung der Magnetfeldlinien sehr groß. Dementsprechend steigt das polodiale Magnetfeld und das Plasma wird instabil gegen die **Knick-Instabilität**. D.h. eine Auslenkung des Plasmas nach aussen erhöht die Dichte des polodialen Anteils des Magnetfeldes und das Plasma wird weiter nach aussen getrieben (= **Ballooning-Moden**), wie in Abb.9.13 gezeigt.

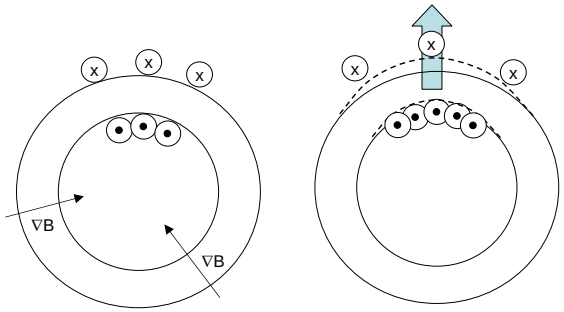


Abbildung 9.13: Knick-Instabilität eines torodialen Plasmas

  Ein ähnlicher Effekt tritt auch beim Plasmabetrieb auf. Wird das Plasma aufgebaut, steigt die Leitfähigkeit gerade im Zentrum der Entladung. D.h. der Strom $\vec{j}_{\parallel}$ wird jetzt zentral im Torus getragen und es ergibt sich eine lokale Erhöhung des Polodialfeldes im Zentrum. Damit kann wieder ein Knick-Instabilität auftreten, die das heiße Zentral-Plasma nach aussen drängt. D.h. der Plasmastrom reißt plötzlich wieder ab und muß erst wieder aufgebaut werden (= **Sägezahn-Instabilität**)

- **obere Grenze für q**

  Ein großes q ist gleichbedeutend mit einer geringen Verscherung des Magnetfeldes. Diese Situation ist instabil gegen die **Raleigh-Taylor-** oder **Austausch-Instabilität**. Jetzt strömt das Plasma über große Distanz an der Außenseite des Torus mit ungünstiger Krümmung. Durch die Zentrifugalkraft wird eine großskalige Austausch-Instabilität angetrieben. Da diese Instabilität besonders bei großen Wellenlängen der Auslenkung signifikant wird ist sie gerade bei kleiner Verscherung dominant, wie in Abb. 9.14 skizziert.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

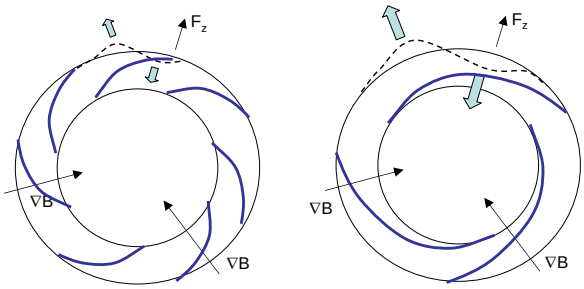


Abbildung 9.14: Austausch-Instabilität bei großer und kleiner Verscherung des Magnetfeldes.

9.3.2 Limiter, Divertor

An Orten an denen die Magnetfeldlinien auf die Wänden eines Fusionsexperimentes treffen, treten lokal sehr hohe Teilchenflüsse auf. Um die Wechselwirkung des Plasmas mit der Wand kontrollieren zu können, muß der Ort bzw. die Art und Weise in der das Plasma mit der Wand in Kontakt tritt gesteuert werden. Hierfür gibt es drei Konzepte:

- **Limiter**

  Ein sog. Limiter wird an den Rand eines Plasmas gesetzt. An diesem Ort wird der Verlust maximiert und damit die Ausdehnung des Plasmas begrenzt.

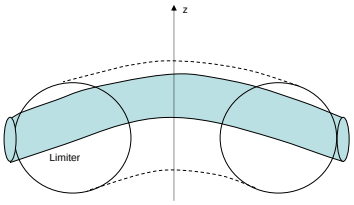


Abbildung 9.15: Limiterbetrieb eines Plasmas

  Der Nachteil des Limiter-Konzeptes ist allerdings die räumliche Nähe zwischen intensivem Plasma und Limiter-Oberfläche. Der daraus folgende Transport von Verunreinigungen in das Plasma und die Strahlungsverluste bedingen eine Begrenzung der Erreichten Temperaturen und Dichten im Fusionsplasma.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

- **Divertor (statisch)**

  Ein besseres Konzept für die Teilchenabfuhr und die Randkontrolle ist die eines **Divertors**. Hierbei wird durch die Erzeugung eines **X-Punktes** in der Magnetfeldkonfiguration ein zweiter abgegrenzter Plasmabereich an der Oberseite bzw. Unterseite des Valuumgefäßes erzeugt. Teilchen, die über die sog. **Separatrix** treten, gelangen auf ihren Magnetfeldlinien in den Bereich des Divertorplasmas, wo sie auf spezielle Targetflächen auftreffen.

  Die räumliche Trennung von Plasma-Wand-Wechselwirkung und Hauptplasma erlaubt Fusionsplasmen mit sehr geringen Verureinigungskonzentrationen.

  Bei Fusionsexperimenten mit Divertor zeigte sich, daß sich bei höheren Heizleistungen der Einschluss schlagartig verbessert. Die Regime mit schlechtem bzw. gutem Einschluss bezeichnet man als L-Mode (low confinement) und H-Mode (high confinement). In der H-Mode enstehen durch den guten Einschluss hohe Temperaturgradienten, die zu kleinskalige Instabilitäten führen. Diese enstehen an Orten hoher Temperaturgradienten am Rand und treiben das heiße Plasma nach aussen. Diese Instabilitäten bezeichnet man als ELM's (edge localized modes).

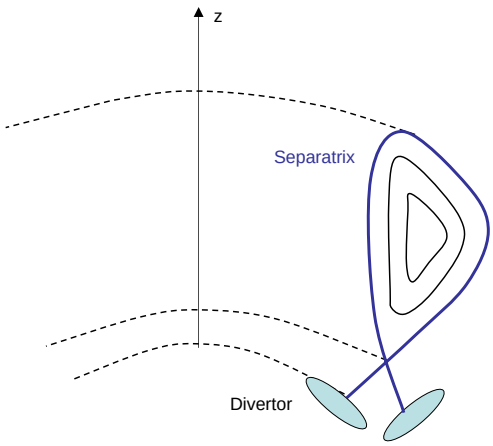


Abbildung 9.16: Divertorbetrieb eines Plasmas

- **Divertor (dynamisch)**

  Ein neueres Konzept basiert auf einer Verwirbelung der Magnetfeldlinien am Rand durch die Erzeugung von zeitlich veränderlichen Magnetfeldern. Der Ort an dem die Ladungsträger auf die Wand treffen

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

verteilt sich dabei über eine große Fläche. Der Idealfall ist erreicht, wenn diese Verwirbelung dazu führt, daß die Trajektorien der Teilchen im Randbereich ergodisiert werden (d.h. jeder Punkt im Phasenraum wird erreicht). Deshalb spricht man bei diesem Konzept auch vom dynamischen ergodischen Divertor (DED).

9.3.3 Transport im Tokamak

Der Transport in einer torodialen Anordnung läßt sich in mehrere Klassen unterteilen, je nach der Längenskala und Stoßfrequenz der jeweiligen dominanten Transportprozesse:

klassischer Transport bei hohem ν_m

wie im Kapitel 4 beschrieben, wird die normale Diffusion in unmagnetisierten Plasmen durch den Einfluss des Magnetfeldes modifiziert. Der Diffusionskoeffizient senkrecht zum Magnetfeld skaliert wie:

$$D_\perp = \frac{D_\parallel}{1+\omega_c^2\tau^2} \propto r_L^2 \nu_m \tag{9.32}$$

Wird die Diffusion als random walk im Ortsraum betrachtet, so ergibt sich eine Schrittweite gemäß dem Lamor-Radius.

neo-klassischer Transport bei niedrigem ν_m

Bei kleiner Stoßfrequenz erleiden die Teilchen weniger Stöße und sie können demnach der Magnetfeld-Topologie ungestört folgen. In einer verscherten torodialen Magnetfeldgeometrie gelangen die Teilchen allerdings in Bereiche von abwechselnd hohem (Torus Innenseite) und niedrigen Magnetfeld (Torus Außenseite). Falls das Verhältnis von Parallel- zu Senkrecht-Geschwindigkeit $\frac{v_\parallel}{v_\perp}$ einen bestimmten Wert unterschreitet bleiben Teilchen in einer Spiegelkonfiguration gefangen, wie in Abb.9.17 gezeigt ist.
Der Pendelbewegung zwischen den zwei Umkehrpunkten ist allerdings die ∇B und die Krümmungsdrift überlagert. Die ∇B Drift war,

$$v_{\nabla B} = \pm\frac{1}{2} v_\perp r_L \frac{B\times\nabla B}{B^2} \tag{9.33}$$

und die Krümmungsdrift für einen Krümmungsradius R:

$$v_R = m v_\parallel^2 \frac{1}{|e|B^2}\frac{R\times B}{R^2} \tag{9.34}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

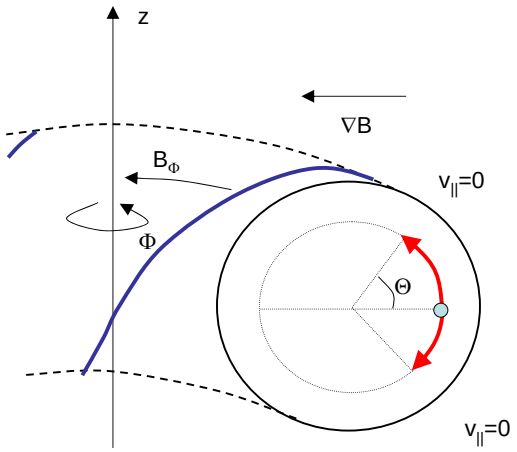


Abbildung 9.17: Pendelbewegung gefangener Teilchen in polodialer Projektion auf einer Fläche verscherter Magnetfeldlinien bzw. konstantem Druck. Dies entspricht der Bananen-Bahn ohne die Berücksichtigung von Driften.

Zusammen genommen ergibt dies für $v_\parallel \ll v_\perp$:

$$v_D = \frac{m}{|e|BR}\left(v_\parallel^2 + \frac{1}{2}v_\perp^2\right) \simeq \frac{m}{2|e|BR}v_\perp^2 \tag{9.35}$$

Diese Drift zeigt senkrecht zum Gradienten des Magnetfeldes und der Magnetfeldrichtung des torodialen Feldes. Diese Drift-Bewegung führt zu einer endlichen Breite der Bananen-Bahn wie in Abb. 9.18 gezeigt.
Die Wegstrecke, die ein Teilchen während der Pendelbewegung zurücklegt, sei L. Sie ist gegeben durch den großen Radius R, den Sicherheitsfaktor q und den Öffnungswinkel $\Delta\Theta$ der Bananen-Bahn in polodialer Projektion als:

$$L \sim qR\Delta\Theta \tag{9.36}$$

d.h. die Zeitdauer in der die Bananen-bahn durchlaufen wird ist $\Delta t = \frac{L}{v_\parallel}$. Damit wird die Breite der Bananenbahn Δb zu:

$$\Delta b = v_D\Delta t = v_D\frac{L}{v_\parallel} = r_L q\frac{v_\perp}{v_\parallel}\Delta\Theta \tag{9.37}$$

Die maximale Breite ergibt sich bei $\Delta\Theta \sim \pi$. Somit wird als Abschätzung für den Diffusionskoeffizienten für neo-klassischen Transport:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

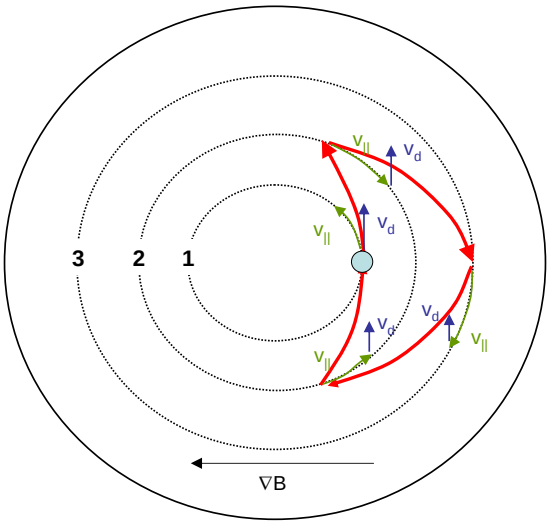


Abbildung 9.18: Bananen-Bahn in polodialer Projektion unter Berücksichtigung der Krümmungs- und ∇B-Drift.

$$D_{neo} = (\Delta b)^2 \nu_m = r_L^2 q^2 \frac{v_\perp^2}{v_\parallel^2} \nu_m \tag{9.38}$$

Der Diffusionskoeffizient für neo-klassischen Transport ist typischerweise 100 mal größer als der für klassische Diffusion.
Der Verlauf der Bananenbahn in einem Plasma mit Dichtegradienten, kann aber zudem zu einem torodialen Stromfluß führen. Die Argumentation ist ähnlich der bei der Herleitung der diamagnetischen Drift. Betrachtet man zwei Bananen-Bahnen gemäß Abb.9.19, so ergibt sich durch ein Volumenelement eine Netto-Teilchenbewegung nach unten. Da hier nur die polodialen Projektion betrachtet wurde entspricht dieser Netto-Teilchenbewegung auch ein Nettostrom in torodialer Richtung des Magnetfeldes. Dieser Strom wird durch den Dichtegradienten getrieben und wird als **Bootstrap-Strom** bezeichnet.
Der Bootstrap-Strom entspricht einer gerichteten Komponente der Parallel-Geschwindigkeit der gefangenen Teilchen. Der Netto-Strom der gefangenen Teilchen, kann sich aber durch Stöße auf nicht-gefangene Teilchen übertragen (Abb. 9.20). Ein torodialer Strom wird erzeugt.
Dies eröffnet die Möglichkeit den Strom durch einen Dichtegradienten anzutreiben, um damit den Stromtrieb durch Induktion zu ersetzen. Dies würde einen stationären Tokamak-Betrieb ermöglichen. Dieses Konzept bezeichnet

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

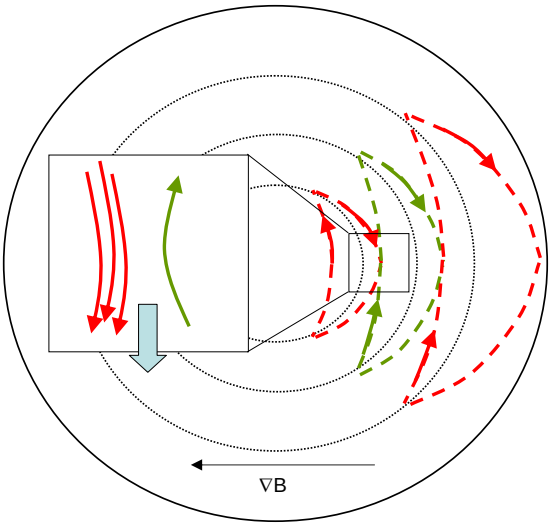


Abbildung 9.19: Erzeugung eines Bootstrap-Stromes durch Überlagerung von Bananen-bahnen in einem Plasma mit Dichtegradientem.

man als **"advanced Tokamak"**.

anomaler Transport

Die bisherige Betrachtung bezog sich auf normale Transportprozesse, die im wesentlichen auf großen Skalen ablaufen. Kleinskaliger Transport senkrecht zum Magnetfeld kann durch Instabilitäten bzw. Turbulenz stattfinden. Man unterschiedet elektrostatische und magnetische Turbulenz.

- **elektrostatische Turbulenz**

  Als ein Beispiel für elektrostatische Turbulenz sei die Drift-Wellen-Instabilität genannt. Bei hohem Druck- oder Temperaturgradienten, können elektrische Felder entstehen. Diese führen zu einer $E \times B$ Drift, die das Plasma nach aussen treibt (Abb. 9.21). Dieser Effekt begrenzt im Wesentlichen den erreichbaren Temperaturgradienten im Plasma.

- **magnetische Turbulenz**

  Als Beispiel für magnetische Turbulenz sei der Fall der Rekonnektion gezeigt, bei dem durch dissipative Prozesse, sich die Magnetfeldtopologie ändern kann. In der idealen MHD ist eine Änderung der Magnetfeldtopologie nicht möglich wegen der Bedingung des eingefrorenen Flusses

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

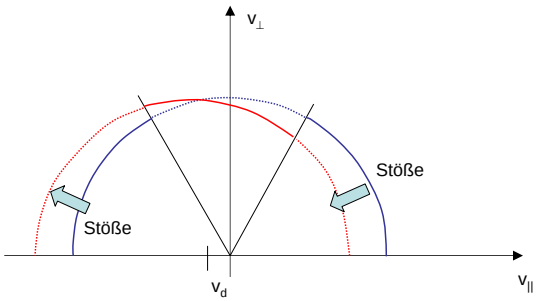


Abbildung 9.20: Übertragung des Netto-Stromes der gefangen Teilchen auf die freien Teilchen.

gelten muß. Bei einer endlichen Leitfähigkeit können sich allerdings benachbarte Flussflächen verbinden (=**Rekonnektion**) und sog. magnetische Inseln schaffen, wie in Abb. 9.22 skizziert. Diese magnetischen Inseln stellen einen radialen Kurzschluss des Plasmas dar.

9.4 Plasmaheizung

Für die Heizung eines Plasmas gibt es drei wesentliche Verfahren:

- **Stromtrieb**

  Durch das Treiben eines torodialen Stromes wird das Plasma ohm'sch geheizt. Allerdings nimmt der Widerstand bei hohen Temperaturen stark ab, $\eta \sim T^{-3/2}$. Deshalb spielt diese Art der Heizung bei heutigen Fusionsexperimenten eine untergeordnete Rolle. Nur für den Aufbau des Plasmas zu Beginn der Entladung ist Stromtrieb zur Heizung wesentlich.

- **Wellenheizung**

  Durch resonante Wellenheizung, kann auch bei hohen Temperaturen das Plasma noch geheizt werden. Die Heizung der Ionen erfolgt durch die Ionen-Zyklotron-Resonanz Heizung (ICRH) für em-wellen parallel zu $\vec{B}$ und die untere Hybride für em-Wellen senkrecht zu $\vec{B}$. Die Heizung der Elektronen erfolgt bei der Elektronen-Zyklotron-Frequenz (ECRH). Bei den hohen Magnetfeldern in zukünftigen Fusionsexperimenten liegen die Resonanzfrequenzen der ECRH im Bereich bis zu

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

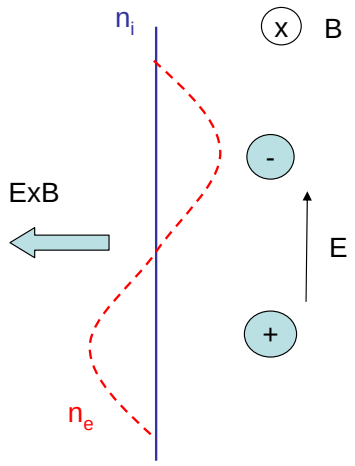


Abbildung 9.21: Driftwellen als eine Möglichkeit zur Erzeugung kleinskaliger elektrischer Felder, die anomalen Transport antreiben können.

200 GHz. Die entsprechenden Sender für diese Frequenzen sind technisch sehr anspruchsvoll. Schließlich, ist durch die Heizung selbst, die Eindringtiefe in die Plasmen begrenzt.

- **Neutralteilcheninjektion**

  Die wichtigste Heizung für gegenwärtige und zukünftige Fusionsexperimente ist die Neutralteilcheninjektion von Protonen. Hierbei werden Ionen zunächst beschleunigt, dann neutralisiert und können somit tief in das Plasma eindringen. Im Plasma selbst werden sie ionisiert und geben dann ihre kinetische Energie an das Plasma ab. Die Injektion kann senkrecht zum Torus oder tangential erfolgen. Bei tangentialem Einschuß, kann damit ein Strom im Plasma getrieben werden, der ohne einen äußeren Transformator auskommt.

  Ein Schema-Zeichnung eines Neutralteilchen-Injektors ist in Abb.9.23 gezeigt.

  Um die Neutralteilcheninjektion effizienter zu machen sind hohe Beschleunigungsspannungen nötig. Allerdings sinkt bei höheren Spannung die Effizienz der Neutralisation für schnelle positive Ionen in einem Gastarget. Dies ist nicht der Fall für die Verwendung von negativen Ionen (der Verlust eines Elektrons für ein schnelles H^- ist sehr viel wahrscheinlicher als der Einfang eines e- für ein schnelles H^+)(siehe

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Abbildung 9.22: In Plasmen mit endlicher Leitfähigkeit ist die Neu-Verknüpfung von Magnetfeldlinien (=Rekonnektion) möglich. Dies erzeugt magnetische Inseln die als radialer Kurzschluss für den Transport wirken.

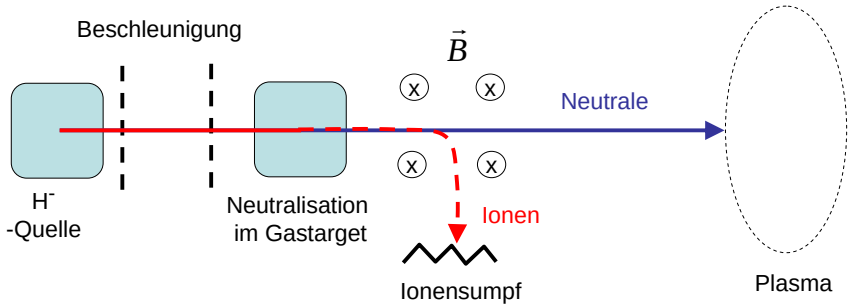


Abbildung 9.23: Neutralteilcheninjektion

Abb.9.24). Problem hierbei ist allerdings der Bau von effizienten leistungsstarken Quellen für negative Ionen.

9.5 Materialien für die Fusion

Die Erosion von Wandmaterialien erfolgt in der Regel durch Stoßprozesse mit energiereichen Teilchen. Für die Bewertung der Schwellenenergie für diese Zerstäubung ist der kinematische Faktor und die Oberflächenbindungsenergie des Materials. Der kinematische Faktor γ_{max} für einen zentralen Stoß beschreibt den Energieverlust des Projektils:

$$\frac{\Delta E}{E} = \gamma_{max} = 4\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \tag{9.39}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

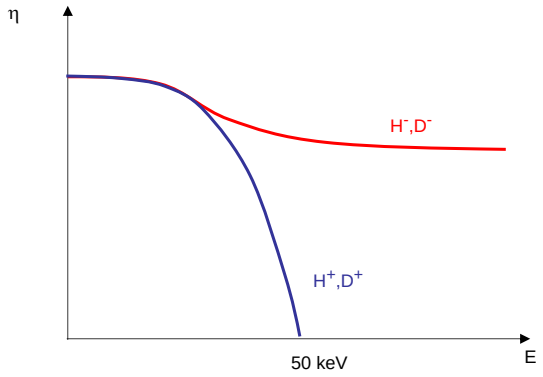


Abbildung 9.24: Wirkungsgrad für Ladungsaustausch

Gemäß Abb. 9.24 ist im einfachsten Fall ist der Zusammenhang zwischen Schwellenenergie E_{th}, Oberflächenbindungsenergie E_{SB} und kinematischer Faktor γ_{max} gegeben als:

$$E_{th} = E_{SB}\frac{1}{\gamma(1-\gamma)} \tag{9.40}$$

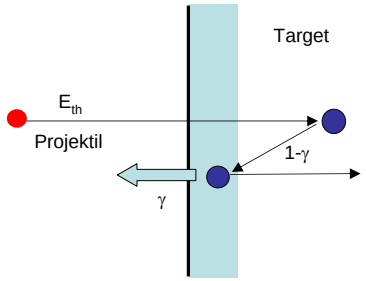


Abbildung 9.25: Zerstäubung durch schnelle Teilchen ab einer Schwellenenergie E_{th} und kinematischem Faktor γ.

Man erkennt, daß der kinematische Faktor für Protonen als Projektil und leichteren Elementen als Wandmaterial besonders groß wird und damit die Schwellenenergie für Zerstäubung sehr klein. Gelangt zerstäubtes Wandmaterial in das heisse Fusionsplasma trägt es durch Linienstrahlung ($\sim Z^4$) zum Leistungsverlust bei.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Für die Auswahl von Wandmaterialien gibt es zwei Optimierungsmöglichkeiten: (i) zum einen die Verwendung eines **Niedrig-Z Materials**, das zwar leicht erodiert wird, das aber beim Eintrag in das Fusionsplasma nur gering zur Linienstrahlung beiträgt; oder (ii) **Hoch-Z Materialien**, die nur schwach erodiert werden und somit kaum ins Fusionsplasmas gelangen können.
Neben diesen Optimierungs-Varianten gelten allerdings noch andere Faktoren. Dies sind Wärmeleitfähigkeit (soll hoch sein), Schockbeständgkeit bei hohen lokalen, kurzzeitigen Teilchenflüssen (soll nicht schmelzen), geringe Neutronenaktivierung und -Degradation der Struktureigenschaften (soll nicht verspröden).
Aus dieser langen Liste an Forderungen hat sich jetzt ein Materialmix für die Wandmaterialien etabliert, der im wesentlichen aus Kohlenstoff für den Divertor (hohe Teilchenflüsse) und aus Wolfram oder Beryllium für die erste Wand des Hauptplasmas (geringe Teilchenflüsse) besteht.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Anhang A

Fragenkatalog

A.1 Kapitel 1: Einleitung

- Definieren sie den Plasmazustand?
- Wie definiert sich Plasma-Frequenz und Debye-Länge ?
- Wann ist die Angabe einer Temperatur für ein Plasma sinnvoll ?
- Was sind entartete, relativistische und ideale Plasmen und wo treten sie auf ?

A.2 Kapitel 2: Beschreibung von Plasmen

- welche Arten der Beschreibung von Plasmen kennen sie und wie unterscheiden sie sich ?
- Beschreiben sie die Trajektorien geladener Teilchen in konstanten elektrischen und magnetischen Feldern. Welche Driften entstehen und was ist ein Führungszentrum ?
- Wie sind Lamorradius und Zyklotronfrequenz definiert ?
- welche Driften gibt es in ungleichförmigen E und B Feldern ?
- welche Driften kennen sie in zeitabhängigen Feldern ?
- warum braucht man eine Verscherung der Magnetfeldlinien in einer torodialen Anordnung ?

- was ist das magnetische Moment und warum ist es eine adiabatische Invariante in einer Spiegelanordnung ?
- Welche adiabatische Invarianten kennen sie und wann gelten sie ?
- Was ist eine Verteilungsfunktion ?
- Wie entstehen die Fluidgleichungen aus dem Liouville-Theorem?
- Was beschreibt die konvektive Ableitung ?
- Wodurch entsteht die diamagnetische Drift und was bezeichnet man als Plasma-β ?
- welch Driften gibt es im Einzelteilchenbild und nicht im Fluidbild und umgekehrt ?

A.3 Kapitel 3: Stöße

- Definieren sie freie Weglänge, Stossfrequenz und Stosszeit ?
- Wie werden Stöße in die Fluidgleichungen eingebaut ?
- Was bezeichnet den Wirkungsquerschnitt und den differentiellen Wirkungsquerschnitt ?
- Was ist der Wirkungsquerschnitt für Impulsübertrag ?
- Was ist das Streuintegral ?
- Wie ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für Coulomb-Streuung definiert bzw. wie skaliert er mit Streuwinkel und Energie ?
- was beschreibt der Coulomb-Logarithmus und welche Näherung macht man um einen totalen Wirkungsquerschnitt für Coulomb-Streuung zu erhalten ?
- Was bezeichnet man als Langevin-Einfang-Querschnitt ?
- Wie ist der typische Verlauf eines Ionisationsquerschnitts mit der Energie ?

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

A.4 Kapitel 4: Transport

- Was bezeichnet man als Drift und Diffusion und wie sind diese mit der Stossfrequenz verknüpft ?
- Wie ist die Grundmode des Diffusionsprofil im eindimensionalen (Parallel-Platten Anordnung)?
- Was bezeichnet man als ambipolare Diffusion und wie entsteht sie ?
- wie skaliert die Diffusion bei geladen-ungeladen Stößen mit dem Magnetfeld und der Temperatur der Teilchen ? Wie unterscheidet sich der Transport senkrecht und parallel zum Magnetfeld ?
- Warum führen bei vollionisierten Plasmen nur Stöße zwischen ungleichnamig geladenen Teilchen zu Transport ?
- Was ist der spezifische Widerstand eines Plasma und wie skaliert er mit Teilchendichte und Temperatur ?
- Wie leiten sich die MHD Gleichungen für voll-ionisierte Plasmen ab?
- Was ist das verallgemeinerte ohmsche Gesetz ?
- Wie skaliert die Diffusion in vollionisierten Plasmen mit Temperatur und Teilchendichte?
- Was ist die Bohm-diffusion? Was sind mögliche Ursachen dafür ?
- Was bezeichnet man als eingefrorenen Fluss ?
- Wie diffundiert Magnetfeld in ein Plasma ?
- Was ist ein Pinch und wie funktioniert er ?
- Welcher Mechanismus wird durch die Rayleigh-Taylor Instabilität beschrieben ?
- Wie entstehen Driftwellen und warum werden sie instabil ? Welche Bedeutung hat das für die Fusion ?
- Erklären sie anschaulich die Plasma-Strahl Instabilität?

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

A.5 Kapitel 5: Wellen

- Unterscheiden sie elektrostatische und elektromagnetische Wellen ?
- Wann können sich elektrostatische Elektronenwellen ausbreiten ?
- Wie unterscheiden sich elektrostatische Elektronen- und Ionenwellen?
- Beschreiben sie elektrostatische Elektronen- und Ionenwellen senkrecht zum Magnetfeld.
- Was ist die obere hybride Frequenz ?
- Skizzieren sie die Dispersion elektromagnetischer Wellen in unmagnetisierten Plasmen.
- Was ist der Brechungsindex eines Plasmas ?
- Wie erfolgt die Plasma-Heizung bei der oberen hybriden Frequenz ?
- Was ist die Faraday-Rotation ?
- Was ist die Idee der Hochfeldeinkopplung ?

A.6 Kapitel 6: Kinetik

- Was beschreibt die Verteilungsfunktion?
- Wie sieht der Stoßterm in der Boltzmann-Gleichung aus ?
- Was ist die 2-Term Näherung ?
- Welche Annahmen liegen der Maxwell- und der Druyvesteyn-Verteilung zugrunde ?
- Wie sieht die Form der Verteilungsfunktion in Abhängigkeit von den Wechselwirkungsmechanismen aus?
- Erklären sie anschaulich die Landau-Dämpfung ?

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

A.7 Kapitel 7: Plasmarand

- Was ist das Bohm-Kriterium ?
- Welche Randbedingungen gelten in der Randschicht, welche in der Vorschicht ?
- Was ist das Floating Potential und was ist das Plasma Potential ?
- Was sind die Annahmen bei der Child-Langmuir-Schicht und wie skaliert der Strom mit der Spannung und der Dicke der Randschicht ?
- Beschreiben sie das Prinzip einer Sonden-Messung.

A.8 Kapitel 8: Niedertemperaturplasmen

- Was ist eine Townsend-Entladung?
- Wie geschieht der Übergang von einer unselbstständigen zu einer selbstständigen Entladung?
- Beschreiben Sie die Paschenkurve.
- Wie entstehen die einzelnen Zonen der DC Glimmentladung.
- Beschreiben sie die Strom-Spannungs Kennlinie einer DC Glimmentladung.
- Wie funktioniert eine Magnetron-Entladung.
- Skizzieren sie den Spannungsverlauf in einer symmetrischen und asymmetrischen RF-Entladung.
- Beschreiben die Ursache für die Hysterese in einer induktiven rf-Entladung.
- Wie skaliert die absorbierte Leistung in einem rf-Plasma mit Frequenz und rf-Spannung.
- Was ist die stochastische Heizung?
- Wie funktioniert eine Barrieren-Entladung ?

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

A.9 Kapitel 9: Fusion

- Beschreiben sie die Leistungsbilanz eines Fusionsreaktors ?
- Wie skalieren die Bremsstrahlung und die Linienstrahlung mit der Kernladungszahl ?
- Was ist das Lawson-Kriterium ?
- Wie wird die MHD-Stabilität der torodialen Anordnung erreicht ?
- Was ist ein Divertor ?
- Was ist neo-klassischer Transport ?
- Wie funktioniert ein Tokamak ?
- Warum werden in Zukunft negative Ionen für die Plasma-Heizung wichtig ?

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Index

α/γ-Mode, 189
μ-katalysierte Fusion, 221
2 Term Näherung, 150

Adiabatengleichung, 86
adiabatische Invariante
    dritte, 44
    erste, 40
    zweite, 42
advanced tokamak, 238
Alfven-Wellen, 144

B-Feld
    polodial, 228
    torodial, 227
Ballooning-Moden, 232
Bananen-Bahn, 105
Beweglichkeit, 86
Bogen-Entladung, 210
Bohm-Geschwindigkeit, 167
Boltzmann-Beziehung, 11, 59
Boltzmann-Gleichung, 147
Bootstrap-Strom, 237
Brechungsindex, 135
Bremsstrahlung, 224

Child-Langmuir-Schicht, 173
Coulomb-Logarithmus, 74, 75
Coulomb-Streuung, 72
cut-off, 206

DC self bias, 200
Debyelänge, 12, 60
Definition Druck, 55
Definition Plasma, 6
dielektrisch behinderte Entladung (DBD), 213
Diffusion
    ambipolar, 89
    Bohm, 103
    Dichteprofil, 88
    Diffusionskonstante, 86
    Einsteinbeziehung, 87
    Magnetfeld, 106
    senkrecht zu $\vec{B}$, 93
Divertor
    dynamisch, 234
    statisch, 234
Drift
    ∇B, 26
    $\vec{E} \times \vec{B}$, 21
    diamagnetische, 60, 93
    Gravitation, 22
    Krümmung, 26

ECR-Plasmen, 207
Einschluss
    Stellarator, 230
    Tokamak, 229
Elektrodenjet, 212
Elektronen
    runaway, 97
ELM - edge localized mode, 234
Euler'sche Beschreibung, 51

Führungszentrum, 21
Faraday-Rotation, 142
Feldumkehr, 195
Fermi-Beschleunigung, 44

Fokker-Planck-Gleichung, 149
freie Weglänge, 67
Fusionsreaktionen, 219

Gamow-Faktor, 220
Gleichgewicht
    globales thermisches, 10
Gleichung
    Adiabaten, 48
    Boltzmann, 51
    Kontinuitäts, 53
    Maxwell, 47
    Vlasov, 51
    Zustands, 47
globales Modell, 90, 91

H-Mode, 234
Heizung
    Neutralteilchen, 240
    stochastisch, 197
    Stromtrieb, 239
    Wellenheizung, 239
Helikon-Plasmen, 142
Helium-Abfuhr, 226
Hochfeldeinkopplung, 142

induktive Entladung, 202
    E-Mode, 205
    H-Mode, 205
    Hysterese, 205
Instabilität
    Austausch, 232
    Driftwellen, 116
    Knick, 110, 232
    Plasma-Strahl, 119
    Raleigh-Taylor, 232
    Rayleigh-Taylor, 111
    Sägezahn, 232
    Würstchen, 110
Instabilitäten
    dissipative, 118
    resistiv, 118

Interferometrie, 136
Ionisation, 78
ITER, 219

kapazitive RF-Entladung, 191
Kathodensaum, 186
Kathodenspot, 212
kinematischer Faktor, 71, 242
Konvektion, 57
konvektive Ableitung, 51
Korona-Entladung, 184

Lagrange'sche Beschreibung, 51
Landau-Dämpfung, 162
Langevin-Wirkungsquerschnitt, 76
Larmor-Radius, 19
Lawson-Kriterium, 222, 225
Limiter, 233
Liouville-Theorem, 50
Lorentz-Kraft, 18

magnetische Spiegel, 30
    Spiegelverhältnis, 31
magnetisches Moment, 29
magnetisches Pumpen, 42
Magnetohydrodynamik (MHD), 97
Magnetron-Entladung, 189
Matrix-Schicht, 172, 191
Maxwell-Verteilung, 48, 148
MHD
    Einflüssigkeitsgleichung, 98
    eingefrorener Fluß, 109
    ideal, 108
    verallgemeinertes Ohm'sches Gesetz, 100
MHD-Generator, 23
Mikrofeld, 13
Mikrowellenplasmen, 206
Momente der Vlasov-Gleichung
    Energiebilanz, 57
    Impulsbilanz, 54
    Teilchenbilanz, 52

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Multifrequenz-Plasmen, 198

Näherung
  lokale, 156
  nicht-lokal, 156
negatives Glimmlicht, 187
neo-klassicher Transport, 105
Niedrig-Z Materialien, 243

Paschen-Kurve, 186
Pinch-Entladung, 109
Pitchwinkel, 31
Plasma β, 62
Plasma-Ionen-Immersions-
    Implantation PIII, 173
Plasmafrequenz, 13, 125
Plasmen
  entartet, 15
  ideal, 14
  relativistisch, 15
Polarisations-Streuung, 75
Polarisationsdrift, 35
Polarisierbarkeit, 76
ponderomotive Kraft, 35
positive Säule, 187
Potential
  floating, 169
  Plasma, 170

Ramsauer-Minimum, 78
random walk, 92
Randschicht
  Raumladungszone, 165
  Vorschicht, 167
Rekonnektion, 239
Relaxations-Näherung, 85
Richardson-Gleichung, 210
Rogowskispule, 63
Rutherford-Streuung, 72

Schwerpunktsystem, 70
Separatrix, 234
Sicherheitsfaktor q, 230
Skintiefe, 203
Stoßfrequenz, 67
Stoßintegral, 71
Stoßparameter, 68
Stoßzeit, 67

Townsend-Koeffizient
  erster, 183
  zweiter, 185

unselbstständige Entladung, 183

Verlustkegel, 32
Verteilungsfunktion, 47, 48
Vlasov-Gleichung, 147

Wärmeleitung, 58
Wellen
  außerordentliche, 136
  Cutoff, 139
  elektromagnetische, 133
  Elektronen, 123, 125
  Ionen, 127
  magnetosonische, 145
  obere Hybride, 129
  ordentliche, 136
  Resonanzen, 138
  untere Hybride, 130
Wellengleichung, 134
Whistler-Moden, 141
Widerstand
  spezifisch, 95
Wirkungsquerschnitt, 66
  differentiell, 68

X-Punkt, 34, 234

Zerstäubung, 241
Zyklotron-Frequenz, 19

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum